पत्राचार पाठ्यक्रम
माध्यमिक शिक्षा मण्डल, मध्यप्रदेश, भोपाल

प्रश्न पत्र– पंचम

डिप्लोमा इन एज्युकेशन

(प्रथम वर्ष)

विषय – गणित और उसका शिक्षण

संख्या 1 से 5

पत्राचार पाठ्यक्रम
माध्यमिक शिक्षा मंडल, म.प्र. भोपाल

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

प्रिय छात्राध्यापक,

डिप्लोमा इन एज्युकेशन (डी.एड.) की पत्राचार पाठ्यक्रम परीक्षा में आपका स्वागत है। इस द्विवर्षीय परीक्षा में प्रथम वर्ष में 5 विषय एवं द्वितीय वर्ष में 5 विषय कुल 10 विषयों का आप अध्ययन करेंगे। प्रत्येक विषय के पाठ्यक्रम को आपकी अध्ययन की सुविधा के लिए 10–10 इकाइयों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक विषय की प्रथम 05 इकाइयाँ (1से5) आपको एक पुस्तक के रूप में भेजी जायेंगी। उसके पश्चात् द्वितीय (6से 10) इकाइयाँ एवं अध्यापन अभ्यास हेतु प्रदर्शन पाठ एवं निर्देश पुस्तिका भी भेजी जा रही है। आपको एक पुस्तक के रूप में भेजी जायेंगी। अध्ययन की दृष्टि से प्रत्येक इकाई के विषयांश को कुछ उप इकाइयों में बांटा गया है। जिसमें प्रत्येक उपइकाई के उपरान्त पाठगत प्रश्न दिये जा रहे हैं। इकाई के अन्त में आत्म परीक्षण के प्रश्न आपके अभ्यासार्थ दिए जा रहे हैं। जिन्हें आपको अपने अध्ययन के आधार पर स्वयं हल करना है।

आपके सुचारू रूप से अध्ययन एवं जानकारी के लिए प्रत्येक विषय का पाठ्यक्रम एवं अंक विभाजन प्रथम अध्याय के प्रारम्भ में संलग्न कर भेजा जा रहा है। परीक्षा में आपकी सफलता के लिए शुभकामनाएँ।

प्रस्तावित पाठ्यक्रम एवं अंक योजना.

डी.एड. प्रथम वर्ष
‘‘ पाँचवां प्रश्न पत्र’’
विषय : गाणित एवं उसका शिक्षण
इकाईवार अंक विभाजन

कुल 75 अंक

इकाई क्र.	इकाई का नाम	अंक	कालखण्ड
1.	मौलिक गणित (क) गणित का इतिहास	2	3
	(ख)मौलिक गणित	3	6
2.	व्यवहारिक गणित	6	13
3.	अंक गणित	6	13
4.	बीज गणित	6	15
5.	ज्यामिती	12	20
6.	क्षेत्रमिती	6	13
7.	सांख्यिकी	4	08
8.	गणित अध्यापन के उद्देश्य एवं विधियां	10	20
9.	गणित में मूल्यांकन एवं नवाचार	15	26
10.	भारतीय गणितज्ञ एवं वैदिक गणित	5	13
	सत्रगत कार्य –		
	योग –	**75**	**150**
		25	**–**
		100	**150**

डी.एड़. प्रथम वर्ष
"पाँचवा प्रश्न पत्र "

विषयः– गणित एवं उसका शिक्षण

इकाई

1. (क) गणित का इतिहास एवं (ख) मौलिक गणित की आरंभिक गतिविधियॉ, संख्याओं का विकास, चारों मौलिक क्रियायें, स्थानीय मान, भिन्नों का योग, घटाव, गुणा एवं भाग, दशमलव में भिन्नों का निरूपण एवं परस्पर परिवर्तन।
2. व्यवहारिक गणित–प्रतिशत एवं उनका अनुप्रयोग, औसत, लघु.स.अ. एवं म.स.अ. (H.C.F) की अवधारणा, लाभ हानि और बट्टा, सरल ब्याज, चक्रवृद्वि ब्याज (अधिकतम तीन वर्ष) दोनों ब्याजों में अंतर एवं चक्रवृद्धि ब्याज का अनुप्रयोग, अनुपात, समानुपात, ऐकिक नियम तथा समय, कार्य एवं दूरी, वर्गमूल एवं उनके अनुप्रयोग
3. अंकगणितः प्राकृत संख्यायें, पूर्ण संख्या, पूर्णाक संख्यायें, परिमेय संख्याओं पर मूलभूत संक्रियाऐं एवं क्रम विनिमय, साहचर्य, वितरण के नियम अपरिमेय संख्याऐं, संख्या रेखा पर उक्त संख्याओं का प्रदर्शन, सान्त व असान्त दशमलव, करणी एवं उसके हर का परिमेयीकरण तथा वास्तविक संख्या एवं काल्पनिक संख्यायों की अवधारणा घात एंव घातांकों के नियम का अध्ययन, उन पर आधारित प्रश्न।
4. बीज गणित बहुपद एवं बहुपदों के घात, इनके योग, घटाना, गुणा एवं भाग
   निम्न बीजीय सूत्रों पर आधारित सरल प्रश्न

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

बहुपदों का गुणनखण्ड़ विधि से LCM एवं HCF ज्ञात करना (इन पर केवल सरल प्रश्न) सरल समीकरण एवं उन पर आधारित प्रश्न, युगपत समीकरण एंव उन पर आधारित प्रश्नों के हल (सामान्य एवं ग्राफ विधि द्वारा)

5. ज्यामिति – रेखागणित के परिभाषित पद

(अ) बिन्दु, रेखा, रेखा खण्ड, किरण, समतल, प्रतिच्छेद रेखायें, समरेख एवं असमरेख–बिन्दु, कोण की अवधारणा, कोण की माप, कोण के भाग, पूरक एवं सम्पूरक कोण, शून्य कोण, समकोण, न्यून कोण, अधिक कोण, सरल रेखीय कोण, त्रिभुज की अवधारणा, त्रिभुज का अन्तः भाग एवं बाह्य भाग, त्रिभुजों का वर्गीकरण (कोणों के आधार पर एवं भुजाओं के आधार पर)।

(ब) (i) समांतर रेखाओं की धारणा, संगति कोण, एकान्तर कोण, अन्तःकोण, समांतर रेखाओं संबंधी प्रमेय, गुनियो द्वारा समान्तर रेखाऐं खींचना।

(ii) रेखागणितीय उपकरण एंव उनके उपयोग द्वारा वृत्त की रचना।

(iii) सममिति, सममिति केन्द्र, त्रिभुज, आयत, वृत, चतुर्भूज आदि की सममिति, सममिति अक्ष दो आकृतियों में सममिति (कागज को मोड़कर सममिति आकार बनाना)

(स) (i) त्रिभुज के अन्तः कोणों का योग एवं बहिष्कोण संबंधी प्रमेय।

(ii) त्रिभुज की सर्वांगसमता,समरूपता एंव समता संबंधी अवधारणा।

(iii) त्रिभुज की सर्वांगसमता, दिये गये त्रिभुज के सर्वांगसम त्रिभुजों की रचना, सर्वांगसमता की शर्ते, त्रिभुज की सर्वांगसमता संबंधी प्रमेय, समद्विबाहु त्रिभुज संबंधी प्रमेय त्रिभुजों की असमान भुजा संबंधी प्रमेय (त्रिभुज के कोण एवं भुजाओं में संबंध)

(द) त्रिभुज की रचना जबकि निम्नलिखित अवयव दिये गये हों।

(i) दो भुजाएं एवं उनके बीच का कोण।

(ii) एक भुजाएं व दो कोण।

(iii) तीन भुजाऐं

(iv) समकोण का कर्ण एक भुजा अथवा एक न्यून कोण

(इ) चतुर्भुज की धारणा, चतुर्भुज के अन्तः एंव वाह्य कोण चतुर्भुज के अन्तः एवं बाहय भाग, चतुर्भुजों का वर्गीकरण, विषम चतुर्भुज, सम चतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज के गुण एवं उन पर आधारित प्रमेय। आयत, वर्ग, पतंगाकारचतुर्भुज (काईट)। चतुर्भुज में समरूपता एवं समता की धारणा। समांतर चतुर्भुज संबंधी प्रमेय, आयत समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल संबंधी प्रमेय।

(फ) चतुर्भुज की रचना जबकि निम्नलिखित अवयव दिये हों।

(i) चारों भुजाएँ एवं एक कोण

(ii) तीन भुजाऐं एवं दी गई एक भुजा के दो कोण

(iii) चारों भुजायें एवं एक कर्ण।

(iv) समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाऐं एंव उनके अंतर्गत कोण।

(क) विभिन्न रेखागणितीय आकृतियों में समरूपता का बोध, त्रिभुजों की समरूपता की शर्तें

(ख) वृत की धारणा, केन्द्र, त्रिज्या, व्यास, चाप, चापकर्ण, वृत्त का आंतरिक एवं बाहय भाग, वृतीय एवं अर्धवृतीय कोण, वृत खंड़ एवं वृत्तार्ध का कोण, किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण।

(ग) त्रिभुज के परिगत, वर्हिगत एवं अंतर्गत वृत की रचना। वृत की परिधि पर किसी बिन्दु पर तथा बाहरी भाग में स्थित किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखायें खींचना।

6. **क्षेत्रमिति–** त्रिभुजाकार, वर्गाकार, आयताकार, समान्तर चतुर्भुजाकार, विषमबाहु चतुर्भुजाकार, समचतुर्भुजाकार, वृत्ताकार क्षेत्रों का क्षेत्रफल निकालना, घन, घनाभ, लम्ब वृत्तीय बेलन एवं गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ, आयतन एवं वक्रपृष्ठ ज्ञात करना, कमरे की दीवालों का क्षेत्रफल ज्ञात करना। ठोस आकारों के पृष्ठों का क्षेत्रफल से संबंधित प्रश्न।

7. सांख्यिकी–निर्देशांक एंव आलेखों का प्रारम्भिक ज्ञान, दण्डचित्र एवं आयत चित्रों का निर्माण (Row data) प्रारम्भिक आंकड़ों से बारम्बरता सारणी बनाना। असमूहीकृत एंव समूहीकृत आंकडों की सहायता से मध्यमान एवं मध्यांक ज्ञात करना।

8. गणित अध्यापन के उद्देश्य एंव विधियाँ

(अ) गणित अध्यापन के उद्देश्य, गणित का पाठ्यक्रम में स्थान

(ब) गणित में शिक्षण सहायक समाग्री का निर्माण

(द) दक्षता आधारित शिक्षण

(स) गणित अध्यापन की विधियाँ (1) आगमन एवं (2) निगमन विधियाँ

(इ) गणित संबंधी क्रीड़ा तथा प्रयोगशाला विधियां।

9. गणित में मूल्यांकन एवं नवाचार

(अ) गणितीय दक्षता एवं उनके विकास हेतु पाठ योजनायें।

(ब) दक्षता मूल्यांकन एंव मूल्यांकन रिकार्ड रखना।

(स) आकलन–संकल्पना, महत्व, प्रकार, विशेषतायें और उपयोगिता।

(द) कठिनाइयाँ–निदान एवं निराकरण हेतु अध्यापन।

(इ) गणित में सृजनात्मकता

(क) गणित के सन्दर्भ में बाह्य केन्द्रित तथा क्रियाकलापों पर आधारित शिक्षण

(ख) गणित के प्रश्न पत्र का ब्लूप्रिन्ट बनाकर प्रश्न पत्र बनाना।

(ग) उपरोक्त प्रश्न पत्र की आदर्श उत्तर पत्रिका बनाकर क्रमवार अंकों का विभाजन

(घ) गणित के परीक्षाफल का विश्लेषण कर निदानात्मक उपचार

6. भारतीय गणितज्ञ एंव वैदिक गणित

क. निम्न भारतीय गणितज्ञों का जीवन परिचय, गणित जगत में उनका योगदान एंव कृतियां

1. आर्यभट्ट
2. वराहमिहिर
3. श्रीधराचार्य
4. श्रीनिवास रामानुजम

ख. वैदिक गणित सक्रियाओं की जानकारी एवं उनका अनुप्रयोग

ग. आधुनिक काल के भारतीय गणितज्ञों का गणित में योगादान।

सत्रगत कार्य

निम्नांकित में से कोई पांच

1. एबास्कस का निर्माण, इसका प्राथमिक शालाओं मे उपयोग।
2. कम्पास यंत्र (ज्यामिति बॉक्स) का निर्माण एंव ज्यामिति के शिक्षण में इसका प्रयोग
3. ज्यो (Geo) बोर्ड का निर्माण व इसके द्वारा शिक्षण।
4. संख्या रेखा के मॉडल का निर्माण व इसके द्वारा शिक्षण
5. गोला, शंकु बेलन के मॉडल का निर्माण तथा इसका आयतन व क्षेत्रफल ज्ञात करना।
6. किसी एक कक्षा में विद्यार्थियों की आयु, ऊँचाई तथा भार संबंधी आंकडों का संग्रह करना एंव उनका आरेख बनाना तथा मध्यमान ज्ञात करना।
7. गणित में पेटर्न्स
8. कागज मोड़ कर गणित शिक्षण
9. भारतीय गणितज्ञों का योगदान (प्रयोजन)
10. बीजीय सर्व समिकाओं के ज्यामितीय प्रमाण हेतु मॉडल तैयार करना ।

$$(i)\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(ii)\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(iii)\ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

11- वैदिक गणित की संक्रियाओं पर आधारित प्रश्न मंच का प्रदर्शन की रूपरेखा

सन्दर्भ ग्रन्थ

1. म.प्र. पाठ्य पुस्तक निगम द्वारा प्रकाशित कक्षा 1 से 8 तक की गणित विषय की प्रचलित पाठ्य पुस्तकें
2. गणित शिक्षण – एम.एस. रावत व एस.बी. लाल
3. गणित अध्यापन – सत्संगी एवं दयाल

इकाई – 1 सूचकांक –डी. एड./ V / 1

पत्राचार पाठ्यक्रम

माध्यमिक शिक्षा मडंल, म.प्र. भोपाल

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

विषय – गणित और उसका शिक्षण **प्रश्न पत्र– पंचम** **पाठ क्रमांक 1.**

विषयांश

उपइकाई – एक

गणित का इतिहास ,आदिकाल , पूर्व मध्य काल , मध्यकाल , उत्तर मध्यकाल , वर्तमान काल

संख्याओं का विकास

उपकाई – दो

1. मौलिक क्रियायें , 2.स्थानीय मान

उपइकाई तीन भिन्न

1.. भिन्नों का योग ,2. भिन्नों का घटाना 3. भिन्नों का गुणा 4. भिन्नों का भाग

उपइकाई चार

दशमलव भिन्न

1. दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में बदलना
2. भिन्न को दशमलव संख्या में बदलना

इकाई सारांश

आत्म परीक्षण के प्रश्न

गतिविधियाँ एवं नियत कार्य

चर्चा एवं स्पष्टीकरण के बिन्दु

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

प्रस्तावना

भारत गणित का जन्मदाता है। संख्या,शून्य,स्थानीय मान, अंक गणित ,बीजगणित, कैलकुलस आदि की अवधारणा का प्रारम्भिक कार्य भारत में ही आरंभ हुआ। गणित विज्ञान प्रारंभ में न केवल औद्योगिक क्रांति का बल्कि परवर्ती काल में हुई वैज्ञानिक उन्नति का भी केन्द्र बिन्दु रहा है। बिना

गणित के विज्ञान की कोई भी शाखा पूर्ण नहीं हो सकती। भारत ने औद्योगिक क्रांति के लिये न केवल आर्थिक पूंजी प्रदान की वरन् विज्ञान की नींव के जीवंत तत्व भी प्रदान किये, जिसके बिना मानवता, विज्ञान और उच्च तकनीकी के इस आधुनिक दौर में प्रवेश नहीं कर पाते।

भारत और वैज्ञानिक क्रांति में डेबिड ग्रे लिखते हैं–

''पश्चिम में गणित का अध्ययन लम्बे समय से कुछ हद तक राष्ट्र केंद्रित पूर्वाग्रह से प्रभावित रहा है, एक ऐसा पूर्वाग्रह जो प्रायः बड़बोले जातिवाद के रूप में नहीं बल्कि गैर पश्चिमी सभ्यताओं के वास्तविक योगदान को नकारने या मिटाने के प्रयास के रूप में परिलक्षित होता है। पश्चिम अन्य सभ्यताओं विशेषकर भारत का ऋणि रहा है। और यह ऋण पश्चिमी वैज्ञानिक परंपरा के प्राचीनतम काल ग्रीक सभ्यता के युग से प्रारंभ होकर आधुनिक काल के प्रारम्भ , पुनरूत्थान काल तक जारी रहा है– जब यूरोप अपने अंध युग से जाग रहा था।''

इसके बाद डॉ. ग्रे भारत में घटित गणित के सर्वाधिक महत्वपूर्ण विकसित उपलब्धियों की सूची बनाते हुये भारतीय गणित के चमकते सितारों जैसे आर्यभट्ट , ब्रम्हगुप्त, महावीर, भास्कर और माधव के योगदानों का संक्षेप में वर्णन करते हैं। अंत में वे जोर देकर कहते हैं–

'' यूरोप में वैज्ञानिक क्रांति के विकास में भारत का योगदान केवल हासिये पर लिखी जाने वाली टिप्पणी नहीं है जिसे आसानी से और अतार्किक तौर पर यूरोप केंद्रित पूर्वाग्रह के आडम्बर में छिपा दिया गया है। ऐसा करना इतिहास को विकृत करना है और वैश्विक सभ्यता में भारत के महानतम योगदान को नकारना है।

महान वैज्ञानिक अलवर्ट आईसंटीन ने कहा है –

'' हम भारत के ऋणी है जिन्होंने हम सभी को गिनना सिखाया'' जिसके बिना कोई भी वैज्ञानिक खोज संभव नहीं थी।

उद्देश्य :–

प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप –

- गणित की आरम्भिक गतिविधियों को समझ सकेंगे।
- संख्याओं के विकास के बारे में जान सकेंगे।
- गणित की मौलिक क्रियाओं के बारे में जान सकेंगे।
- संख्या में अंकों के स्थानीय मान के बारे में जान सकेंगे।
- भिन्न संख्याओं के जोड़, घटाना, गुणा एवं भाग संक्रियायें कर सकेंगे।
- दशमलव संख्याओं को भिन्न संख्याओं में बदलना तथा भिन्नों को दशमलव संख्याओं में बदल सकेंगे।

उपइकाई एक

1. गणित का इतिहास :–

भारतीय गणित के इतिहास का प्रारम्भ आदि ग्रन्थ ऋग्वेद से होता है। इस काल को पांच खण्डों में बांटा जा सकता है–

1. आदिकाल (500 ई.पू. तक)
   (a) वैदिक काल (1000 ई.पू. तक)
   (b) उत्तर वैदिक काल (1000 ई.पू. से 500ई.पू. तक)
2. पूर्व मध्यकाल (500 ई.पू. से 400 ई तक)
3. मध्य काल (400 ई. से 1200 ई. तक)
4. उत्तर मध्यकाल (1200 से 1800 ई. तक)
5. वर्तमान काल (1800 ई. के पश्चात्)

आदिकाल –

यह काल भारतीय गणित के इतिहास में अत्यंत महत्वपूर्ण है इस काल में अंकगणित, बीजगणित एवं रेखागणित को विधिवत स्थापित किया जा चुका था।

(a) **वैदिक काल :–**

इस काल में शून्य तथा दाशमिक स्थानीय मान पद्धति का आविष्कार गणित के क्षेत्र में भारत की अभूतपूर्व देन है।यह निश्चित रूप से ज्ञात नहीं है कि शून्य का आविष्कार कब और किसने किया, परंतु इसका प्रयोग वैदिक काल में होता रहा है। यही पद्धति सारे विश्व में चल रही है तथा इसने ही गणित तथा विज्ञान को प्रगति के उच्च शिखर तक पहुंचाया है, इसी काल के ग्रंथों में गणित की अनेक संक्रियाओं जैसे जोडना, घटाना, गुणा , भाग, भिन्न, वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल आदि का विशेष वर्णन है।

(b) उत्तर वैदिक काल :–

इस काल में रेखागणित के सूत्रों का विकास तथा विस्तार किया गया था। इस काल में तीन सूत्रकारों के नाम उल्लेखनीय है – बौघायन, आपस्तम्ब और कात्यायन।

इसी युग में ज्योतिषियों को अंकगणित की मूल संक्रियाओं योग, गुणा, भाग आदि का भी ज्ञान हुआ। इसके अतिरिक्त इस काल के जैन ग्रंथों में तत्कालीन गणित का विस्तृत विवरण उपलब्ध है। गणित तथा ज्योतिष के विकास में जैनाचार्यों का योगदान रहा है। इन आचार्यों ने अपने ग्रन्थों में गणित के अनेक अध्ययन तत्वों का मीमांसात्मक विवेचना रोचक ढंग से उदाहरण सहित प्रस्तुत किया है। उन्होंने संख्या लेखन पद्धति , बीजगणितीय समीकरण एवं इनके अनुप्रयोग, क्रमचय–संचय, घातांक व लघगुणाक के नियम, समुच्चय सिद्धांत आदि अनेक विषयों पर प्रकाश डाला है।

पूर्व मध्यकाल – इस काल में गणित का पर्याप्त विकास हुआ था, जो कि मध्ययुग के आर्यभट्ट ब्रम्हगुप्त आदि के उपलब्ध साहित्यों से ज्ञात होता है। स्थानांगसूत्र, भगवती सूत्र और अनुप्रयोग द्वार सूत्र इस युग के प्रमुख ग्रंथ है।

बन्दाली गणित में अंकगणित की मूल संक्रियाऐं ,दार्शनिक अंकलेखन पद्धति , भिन्न परिकर्म, वर्ग, घन त्रैराशिक व्यवहार, ब्याजरीति, क्रय–विक्रय संबंधी प्रश्न आदि का विस्तृत विवरण है।

मध्यकाल या स्वर्ण युग

इस काल को भारतीय गणित का स्वर्ण युग कहा जाता है, क्योंकि इस काल में आर्यभट्ट, ब्रम्हगुप्त, महावीराचार्य, भास्कराचार्य आदि जैसे महान गणितज्ञ हुये जिन्होंने गणित की सभी शाखाओं को विस्तृत व स्पष्ट रूप प्रदान किया।

आर्यभट्ट प्रथम (499ई.) ने अपनी पुस्तक आर्य भट्टीय में गणित के महत्वपूर्ण एवं मूलभूत सिद्धांतों को सार रूप में लिखा है। इन्होंने त्रिकोणमिति में व्युत्क्रमज्या का प्रयोग किया। रेखा गणित में इन्होंने π का मान दशमलव के चार स्थानों तक 3.1416 ज्ञात किया। अंक गणित के क्षेत्र में इन्होंने वर्गमूल एवं घनमूल ज्ञात करने की विधियों तथा त्रेराशिक नियम का भी उल्लेख किया । भास्कर ने (प्रथम 600 ई.) अपनी पुस्तक महाभास्करीय, आर्यभट्टीय भाष्य और लघु भास्करीय में आर्यभट्ट द्वारा प्रतिपादित सिद्धांतों को और विकसित किया।

ब्रम्हागुप्त (628 ई) ने गणित की 20 क्रियाओं तथा 8 व्यवहारों पर प्रकाश डाला। बीजगणित में समीकरण तथा अनिर्णीत द्वितीय समीकरण को बताया। इन्होंने त्रिभुज के शुल्ब सूत्र का विस्तृत वर्णन भी किया।

महावीराचार्य (850 ई) ने गणितसार संग्रह नामक गंथ में अंकगणित का विधिवत वर्णन किया है। इसमें संगृहीत प्रश्न अत्यंत मनोरंजक हैं। इन्होंने ल.स. का आधुनिक नियम ज्ञात किया।

आर्यभट्ट द्वितीय (950 ई) ने महासिद्धांत नामक ग्रंथ के एक अध्याय में अंकगणित तथा दूसरे अध्याय में प्रथमघात वाले अनिर्धार्य समीकरण का प्रतिपादन किया।

श्री पति मिश्र (1039 ई.) ने सिद्धांत शेखर एवं गणित तिलक की रचना की। इन्होंने क्रमचय और संचय पर विशेष कार्य किया।

उत्तर मध्यकाल –

इस काल में नारायण पंडित (1356 ई) ने अंकगणित पर '' गणित कोमुदी'' नामक एक वृहत ग्रंथ की रचना की। इसमें अनेक विषयों का प्रतिपादन किया गया।

नीलकण्ठ (1587) ने '' तांत्रिक नीलकण्ठी'' नामक ग्रंथ की रचना की जिसमें ज्योतिष गणित का प्रतिपादन किया गया। कमलाकार (1608 ई) ने सिद्धांत तत्व विवेक नामक ग्रंथ की रचना की।

सम्राट जगन्नाथ (1731 ई) ने '' सम्राट सिद्धांत'' तथा रेखागणित नामक पुस्तकें लिखी।

वर्तमान काल –

1800 ई. के पश्चात् नृसिंह बापू देव शास्त्री (1831 ई) ने भारतीय तथा पश्चात्य गणित पर पुस्तकों का सृजन किया उनकी पुस्तकों में रेखागणित, त्रिकोणमिति, अंकगणित प्रमुख हैं।

सुधाकर द्विवेदी ने दीर्घवृत लक्षण, गोलीय रेखागणित, समीकरण मिमांसा आदि अनेक पुस्तकों की रचना की।

रामानुजम (1889 ई.) रामानुजम सूत्र रूप में गणितीय एवं अन्य सिद्धांतों को लिखने व सिद्ध करने की वैदिक परम्परा के आधुनिक युग के महान गणितज्ञ थे।

स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज (1884–1960 ई.) वैदिक गणित के प्रधान भाष्यकार हैं, इन्होंने अपनी पुस्तक वैदिक गणित में वैदिक सूत्रों को पुनः प्रतिपादित किया है और उनमें निहित सिद्धांतों और विधियों को इतनी सरल भाषा में प्रस्तुत किया है कि गणित का साधारण विद्यार्थी भी उसे आत्मसात् कर गणित के जटिलतम प्रश्नों को कम समय में हल कर सकता है।

2. संख्याओं का विकास –

आदिमानव को गिनती से ज्यादा वासता नहीं पड़ता था। रहने के लिये उसके पास गुफा थी, भोजन पेड़–पौधों द्वारा या फिर हथियारों से शिकार करके उसे मिल जाता था। करीब 10,000 साल पहले जब आदिमानवों ने गांवों में बस कर खेती का काम और पशुपालन आरंभ किया तो उनका जीवन पहले से और अधिक जटिल हो गया। उन्हें अपने दैनिक कार्यक्रम के साथ अपने सार्वजनिक एवं पारिवारिक जीवन में भी नियमितता लाने की आवश्यकता महसूस हुई। उन्हें पशुओं की गिनती करने, कृषि उपज का हिसाब रखने, भूमि की पैमाइस तथा समय की जानकारी के लिये संख्याओं की जरूरत पड़ी। ऐसा माना जाता है कि दुनिया के विभिन्न भागों में तथा कई और स्थानों पर विभिन्न सभ्यताओं में संभवतः एक ही समय के दौरान अपनी–अपनी पद्धति का विकास हुआ होगा।

वर्तमान समय में सारा संसार जिन 1से 9 तक के अंकों तथा 0 के सहारे विज्ञान और गणित आदि की गणनायें करता है वे भारतीय अंक ही है। इन्हें हिन्दु–अरबी अंक, या हिन्दु अंक के नामों से भी जाना जाता है।

पाठगत प्रश्न

1. गणित के इतिहास को कितने भागों में बांटा गया है इनके नाम बतायें।
2. मध्यकाल या स्वर्णयुग के 3 महान गणितज्ञों के नाम बताइये।
3. उत्तर मध्य काल के 2 गणितज्ञों एवं उनकी रचनाओं के नाम बताइये।
4. वर्तमान काल के गणितज्ञों के नाम बताइये।

उपइकाई – दो

1 मौलिक क्रियायें –

गणित की मुख्य चार मौलिक संक्रियायें होती हैं

(i) जोड़ना

(ii) घटाना

(iii) गुणा

(iv) भाग

(i) जोडना – जब किसी संख्या या अंक में एक या एक से अधिक संख्या को मिलाया जाता है तो उसे जोड़ कहते हैं। जोड़ को '+' चिन्ह से प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरण – 16+9= 25

(ii) घटाना – जोड़ने की क्रिया के विरूद्ध प्रक्रिया को घटाना कहा जाता है। जब किसी संख्या अथवा अंक से किसी दूसरी संख्या या अंक को कम किया जाता है। तो उसे घटाना कहा जाता है। घटाने को – चिन्ह से प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरण – 25–9 = 16

(iii) गुणा – जब किसी संख्या अथवा अंक में उसी संख्या या अंक को एक या एक से अधिक बार जोड़ा जाता है तो उसे गुणा कहते हैं संख्या अथवा अंक को जितनी बार जोड़ा जाता है वह उतनी ही बार गुणा होता है। गुणा को X चिन्ह् से प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरण – 8 + 8 + 8 + 8 + 8=40

अतः 8X5=40

(iii) भाग – गुणा करने की क्रिया के विरूद्ध प्रक्रिया को भाग कहा जाता है। जब किसी संख्या अथवा अंक में किसी संख्या अथवा अंक को एक से अधिक बार घटाया जाता है तो उसे भाग कहते हैं। संख्या अथवा अंक को जितनी बार घटाया जाता है,उतनी ही बार भाग देना होता है। भाग को "÷" चिन्ह् से प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरण – 40÷8=5

2. स्थानीयमान –

वर्तमान में प्रचलित संख्या पद्धति का आधार दस है। इसमें दस अंकों 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 की सहायता से किसी भी बड़ी व छोटी संख्या को बनाया जा सकता है।

अंकों की विशेषताएँ

(i) प्रत्येक अंक का अपना एक स्वतंत्र मान है।

(ii) संख्या में अंकों के स्थान के आधार पर प्रत्येक अंकों के अलग–अलग मान होते हैं जिसे अंकों का स्थानीय मान कहते हैं। उदाहरण के लिये

हम संख्या 2323 में देखें तो अंक 2 व 3 का स्वतंत्र मूल्य क्रमशः 2 और 3 ही है परंतु स्थानीय मान के आधार पर इकाई स्थान पर स्थित '3' का स्थानीय मान '3' ही है परंतु सैकड़े के स्थान पर स्थित 3 का स्थानीय मान 3×100=300 है। अंक एक ही है परंतु उसके मूल्य अलग–अलग हैं। इसी तरह 2 क्रमशः दहाई व हजार के स्थान पर हैं इसका मूल्य इस संख्या में क्रमशः 2×10=20 और 2×2000 है। इस अंक पद्धति को दाशमिक स्थानीय मान अंक पद्धति कहते हैं।

उदाहरण द्वारा उसे समझिए 4572 में सभी अंकों के स्थानीय मान इस प्रकार हैं –

4 हजार के स्थान पर हैं अतः 4 का स्थानीय मान = 4000

5 सैकडा के स्थान पर है अतः 5 का स्थानीय मान =500

7 दहाई के स्थान पर है अतः 7 का स्थानीय मान = 70

2 इकाई के स्थान पर है अतः 2 का स्थानीय मान = 2

इन दस अंक संकेतों में सबसे अद्भुत संकेत 0 है। वैसे तो शून्य का कोई मान नहीं हैं परंतु किसी अंक का सहारा लेते ही उस अंक की दस गुनी कीमत बढ़ा देता है। 5 के बाद में 0 लगाते हैं तो उसका मान 5×10=50 हो जाता है, दो शून्य लगाने पर 5 का मूल्य 5×10×10=500 हो जाता है। किसी संख्या में 0 उस स्थान पर किसी सार्थक अंक (1 से 9 तक) की अनुपस्थिति दर्शाता है। उदाहरणार्थ संख्या 305 में 0 कोई भी दहाई न होने के दर्शा रहा है।

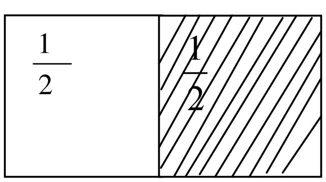
पाठगत प्रश्न

5. गणित की मुख्य मौलिक संक्रियाए कौन–कौन सी हैं?
6. वर्तमान संख्या पद्धति को दस आधारीय संख्या पद्धति क्यों कहते हैं?
7. 697302 में 9 तथा 0 का स्थानीय मान क्या होगा?

उपइकाई – तीन

भिन्न –

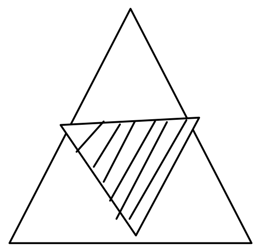
किसी सम्पूर्ण वस्तु का समान भागों में विभक्त होना तथा किसी एक भाग या भागों का सभी समान भागों से जो सम्बन्ध होता है उसे भिन्न के रूप में जाना जाता है। जैसे –



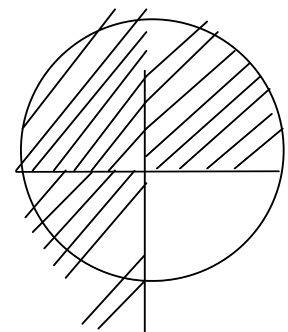
चित्र में एक वस्तु के दो समान किये गये हैं। इनमें से एक भाग को भिन्न 1/2 से दर्शाया जाता है। चित्र में दो समान भागों में से एक भाग छायांकित किया गया है। यह छायांकित भाग कुल दिये गये भागों में से एक भाग है।

चूंकि $\frac{1}{2}$ में हमने वस्तु के दो समान भाग किये हैं तो हर के रूप में नीचे लिखा है तथा उसमें से एक भाग लिया है अतः एक ऊपर लिखा है। इसके बीच में एक रेखा खींच देते हैं यह रेखा बटा कहलाती है। इसे पढेंगे एक बटे दो।

इस प्रकार



छायांकित भाग एक बटा चार $\left(\frac{1}{4}\right)$



छायांकित भाग तीन बटा चार $\left(\frac{3}{4}\right)$

सम भिन्न – वह भिन्न जिसमें अंश हर से छोटा होता है उसे समभिन्न कहते हैं।

जैसे – $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{1}{5}$ आदि

विषम भिन्न – वह भिन्न जिसमें अंश , हर से बड़ा या बराबर होता है , उसे विषम भिन्न कहते हैं।

जैसे – $\frac{9}{5}, \frac{11}{10}, \frac{6}{6}$ आदि

मिश्रभिन्न – कुछ भिन्नों में सम भिन्न के साथ पूर्णांक भी लिखा होता है, इस प्रकार के भिन्न को मिश्र भिन्न कहते हैं–

जैसे : $2\frac{1}{2}, 3\frac{3}{5}, 5\frac{3}{8}$ आदि

समतुल्य भिन्न – ऐसी भिन्नें जिनके अंश तथा हर अलग–अलग होते हुये भी वस्तु के समान भागों को प्रदर्शित करती है।समतुल्य भिन्न कहलाती हैं।

जैसे – $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ समतुल्य भिन्न हैं।

किसी भिन्न के अंश व हर में किसी एक ही संख्या से गुणा कर दें तो हमें समतुल्य भिन्न प्राप्त होती है।

जैसे – $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$

$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$

सजातीय भिन्न – वे भिन्न सजातीय भिन्न कही जाती हैं जिनके हर एकसमान होते हैं।

जैसे 3/5 और 2/5 सजातीय भिन्न हैं, क्योंकि इनके हर समान हैं।

1. **भिन्नों का योग**

सजातीय भिन्नों को जोड़ना –

सजातीय भिन्नों को जोड़ने के लिये भिन्न के अंशों का जोड़कर लिखते हैं तथा हर ज्यों का त्यों लिखते हैं।

उदाहरण – $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}$

विजातीय भिन्नों को जोड़ना –

विजातीय भिन्नों को जोड़ने के लिये इन्हें पहले तुल्य भिन्नों में बदलकर जातीय भिन्न बना लेते हैं।

उदाहरण $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{5}$ को जोड़िए।

हल – दोनों भिन्नों में हर समान नहीं है। अतः इन्हें पहले तुल्य भिन्नों में बदलकर सजातीय भिन्न बना लेते हैं फिर उपरोक्त तरीके से जोड़ लेते है।

$$\frac{1}{3}=\frac{1\times5}{3\times5}=\frac{5}{15}$$

तथा $\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{3}{3}=\frac{3}{15}$

अतः $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}$

$$=\frac{5+3}{15}$$

$$=\frac{8}{15}$$

2 भिन्नों को घटाना –

सजातीय भिन्नों को घटाना –

सजातीय भिन्नों को घटाने के लिये पहले भिन्न के अंश में से दूसरे भिन्न के अंश को घटाकर लिखते हैं तथा हर ज्यों का त्यों लिखते हैं।

उदाहरण : $\frac{8}{3}-\frac{6}{3}=\frac{8-6}{3}=\frac{2}{3}$

विजातीय भिन्नों को घटाना :–

दो विजातीय भिन्नों को घटाने के लिये पहले उन्हें सजातीय भिन्नों में बदले लेते हैं फिर उन्हें उपरोक्त तरीके से घटाते हैं।

उदाहरण $\frac{2}{5}$ में से $\frac{1}{4}$ घटाइये।

हल $\frac{2}{5}=\frac{2\times4}{5\times4}=\frac{8}{20}$ तथा $\frac{1}{4}=\frac{1\times5}{4\times5}=\frac{5}{20}$

अतः $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{8}{20}-\frac{5}{20}$

$$=\frac{8-5}{20}$$

$$=\frac{3}{20}$$

भिन्नों का गुणा –

दो भिन्न संख्याओं को गुणा करने के लिये भिन्नों के अंशों का गुणनफल तथा हरों का गुणनफल अलग अलग ज्ञात करते हैं और अंशों के गुणनफल को परिणामी भिन्न के अंश में एवं हरों के गुणनफल को परिणामी भिन्न के हर में लिखते हैं। अतः दो भिन्नात्मक संख्याओं का गुणनफल वह भिन्न होती है, जिसका अंश भिन्नों के अंशों का गुणनफल तथा हर भिन्नों के हर का गुणनफल होता है।

$$\text{भिन्नों का गुणा} = \frac{\text{भिन्नों के अंशों का गुणनफल}}{\text{भिन्नों के हरों का गुणनफल}}$$

उदाहरण–ज्ञात कीजिये $\frac{1}{8}\times\frac{3}{7}$

हल $\frac{1}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{1\times3}{8\times7}=\frac{3}{56}$

उदाहरण – गुणा कीजिये $\frac{2}{3}$ का $\frac{3}{8}$ से

हल $\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{2\times3}{3\times8}$

$$=\frac{6}{24}$$

$$=\frac{1}{4}$$

4 भिन्नों का भाग :–

किसी भिन्न संख्या में दूसरी भिन्न संख्या का भाग देने के लिए हम पहली संख्या में दूसरी संख्या के गुणात्मक प्रतिलोम का गुणा करते हैं।

उदाहरण $\frac{5}{7} \div \frac{6}{7}$ को हल कीजिए

हल $\frac{5}{7} \div \frac{6}{7} = \frac{5}{7} \times \frac{7}{6} = \frac{5}{6}$ यहाँ $\frac{6}{7}$ का गुणत्मक प्रतिलोम $\frac{7}{6}$ है।

उदाहरण–हल कीजिए $\frac{3}{4} \div 8$

हल $\frac{3}{4} \div 8 = \frac{3}{4} \div \frac{8}{1}$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3 \times 1}{4 \times 8}$$

$$= \frac{3}{32}$$

उपइकाई–चार

1. दशमलव संख्या को साधारण भिन्न में बदलना–

दशमलव संख्या को साधारण भिन्न में बदलने में लिए '' दशमलव संख्या में से दशमलव को हटाकर हर में एक लिखते हैं, और दशमलव चिन्ह् के बाद जितने अंक हैं, उतने ही शून्य 1 के बाद लगाते हैं।''

उदाहरण :–

(*i*) $3.8 = \frac{38}{10} = \frac{19}{5}$

(*ii*) $0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

2. भिन्न को दशमलव संख्या में बदलना :–

उदाहरण $14\frac{1}{2}$ को दशमलव भिन्न में बदलिये।

हल :– $14\frac{1}{2} = 14 + \frac{1}{2}$

अब $\frac{1}{2}$ को 10 हर वाली भिन्न में बदलते हैं।

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{5}=\frac{5}{10}=0.5$$

अतः $14\frac{1}{2}=14+\frac{1}{2}$

$$=14+0.5$$
$$=14.5$$

$$14\frac{1}{2}=\frac{14\times 2+1}{2}$$

या $$=\frac{29}{2}\times\frac{5}{5}$$
$$=\frac{145}{10}$$
$$=14.5.$$

उदाहरण $5\frac{1}{40}$ को दशमलव भिन्न में बदलो

हल $5\frac{1}{40}=5+\frac{1}{40}$

$$=5+\frac{1}{40}\times\frac{25}{25}$$
$$=5+\frac{25}{1000}$$
$$=5+0.025$$
$$=5.025$$

इकाई सारांश

भारत गणित का जन्मदाता है। संख्या, शून्य,स्थानीय मान, अंक गणित, बीजगणित, कैलकुलस आदि का सारा प्रारंभिक कार्य भारत में ही सम्पन्न हुआ है।

भारत के गौरवशाली गणित के इतिहास को पांच खण्डों में बांटा गया है

1. आदि काल (500 ई. पू. तक)
   - (a) वैदिक काल (1000 ई. पूर्व तक)
   - (b) उत्तर वैदिक काल (1000 ई. पूर्व से 500 ई. पूर्व तक)
2. पूर्व मध्य काल (500 ई पू. से 400 ई. तक)
3. मध्य काल (400 से 1200 ई तक)

4.उत्तर मध्यकाल (1200 से 1800 ई. तक)

5. वर्तमान काल (1800 ई. के पश्चात्)

- गणित की मुख्य चार मौलिक क्रियायें होती है :–
  जोड़ना, घटाना, गुणा एवं भाग
- संख्या में अंकों के दोहरे मान होते हैं
  (i) प्रत्येक अंक का अपना एक स्वतंत्र मूल्य होता है।
  (ii) संख्या में अंकों के स्थान के आधार पर अलग–अलग मान होता है। जिसे अंक स्थानीय मान कहते हैं।

आत्म परीक्षण के प्रश्न

1. भारतीय गणित के इतिहास का संक्षेप में वर्णन कीजिये।
2. गणित की मुख्य मौलिक क्रियायें कौन–कौन सी है उदाहरण देकर समझाइये।
3. किसी संख्या में अंकों के स्थानीय मान से आप क्या समझे हैं।
4. संख्या 40971 में 4,0,9,7 व 1 का स्थानीय मान बताइये।
5. हल कीजिये –

$(i)\ \frac{1}{5}+\frac{2}{3}$

$(ii)\ \frac{1}{7}-\frac{2}{3}$

$(iii)\ \frac{2}{3}\times\frac{7}{8}$

$(iv)\ \frac{2}{3}\div\frac{7}{8}$

6. 3.8 को साधारण भिन्न में बदलिये ।
7. 0.175 को साधारण भिन्न में बदलिये।
8. $\frac{1}{7}$ को दशमलव भिन्न में बदलो।
9. $5\frac{1}{40}$ को दशमलव भिन्न में बदलो।
10. 2 में $\frac{3}{5}$ से भाग दीजिये।

गतिविधियाँ एवं नियत कार्य

1. गणित के इतिहास पर पुस्तकें पढ़िये
2. प्राचीन एवं वर्तमान युग के गणितज्ञों की जानकारी बनाइये।

3. दशमलव को साधारण भिन्न में एवं साधारण भिन्न को दशमलव भिन्नों में बदलने के अन्य तरीके ज्ञात कीजिये।

चर्चा तथा स्पष्टीकरण के बिन्दु –

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप किन्हीं बिन्दुओं पर और आगे चर्चा या कुछ बिन्दुओं पर स्पष्टीकरण चाहते हैं तो उन्हें नीचे लिखिये।

चर्चा के बिन्दु

....

....

स्पष्टीकरण के बिन्दु

....

....

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

1. (a) आदि काल (i) वैदिक काल (ii) उत्तर वैदिक काल

   (b) पूर्व मध्य काल (c) मध्य काल (d) उत्तर मध्य काल (e) वर्तमान काल

2. आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त, महावीराचार्य
3. नारायण पंडित, नीलकंठ
4. नृसिंह बापू देव शास्त्री, सुधाकर द्विवेदी, रामानुजम
5. योग, घटाना,गुणा एवं भाग
6. स्थानीयमान शीर्षक में देखें
7. 9 का स्थानीयमान 90000 तथा 0 का स्थानीयमान 0 है।

`

पत्राचार पाठ्यक्रम

माध्यमिक शिक्षा मडंल, म.प्र. भोपाल

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

विषय – गणित और उसका शिक्षण प्रश्न पत्र– पंचम पाठ क्रमांक – 2

विषयांश

उपइकाई – एक

प्रतिशत 1.किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलना 2 प्रतिशत को भिन्न में बदलना 3 प्रतिशत को दशमलव में बदलना 4 किसी राशि का प्रतिशत ज्ञात करना 5 औसत

उपइकाई – दो लघुत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समावर्तक

1 लघुत्तम समापवर्त्य 2 महत्तम समापवर्तक 3. लाभ–हानि और बट्टा 4 लाभ–हानि 5 बट्टा

उपइकाई – तीन सरल ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज

1. सरल ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज 2. अनुपात–समानुपात 3. ऐकिक नियम तथा समय कार्य एवं दूरी

4. वर्गमूल एवं उनके अनुप्रयोग

इकाई सारांश

आत्म परीक्षण के प्रश्न

नियत कार्य/गतिविधियाँ

चर्चा एवं स्पष्टीकरण के बिन्दु

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

प्रस्तावना–

दैनिक जीवन में गणित का अत्यधिक महत्व है। दैनिक जीवन में जाने–अनजाने हम अंक गणित का उपयोग करते हैं। जैसे किन्ही परिणामों की संख्यात्मक तुलना करनी हो तो प्रतिशत या अनुपात ज्ञात करते हैं। बाजार से क्रय–विक्रय करते समय विनिमय में लाभ हो रहा है या हानि का हम पता लगाते हैं। बैंक से या किसी से पैसा उधार लेने में अथवा जमा करते समय लगने वाले ब्याज की

गणना करने में हम सरल ब्याज या चक्रवृद्धि ब्याज का उपयोग करते हैं। ऐकिक नियम का प्रयोग कर लाभ–हानि, साधारण ब्याज, चक्रवृद्धि ब्याज, समय कार्य एवं दूरी आदि को आसानी से हल किया जा सकता हैं। दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में हम गणित का उपयोग करते हैं।

उपइकाई–एक

प्रतिशत (Percent) – प्रतिशत गणित में किसी संख्या, परिमाण आदि को व्यक्त करने की एक विधि है। प्रतिशत का अर्थ हैं प्रति सौ या प्रति सैकड़ा। इसे % चिह्न द्वारा प्रदर्शित करते हैं। उदाहरण के लिये माना कि गणित के प्रश्नपत्र का पूर्णांक 100 है और उस प्रश्नपत्र में कोई छात्र 72 अंक प्राप्त करता है तो कहते हैं कि उस छात्र को 72 प्रतिशत (72%) अंक मिले हैं।

1. किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलना–

इसके लिए भिन्न को 100 से गुणा करके तथा % का चिन्ह लगाकर प्रतिशत में प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण– $\frac{4}{5}$ को प्रतिशत में बदलो।

हल– $\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times 100\%$ (भिन्न में 100 का गुणा व % लगाते हैं)$= 80\%$

2. प्रतिशत को भिन्न में बदलना–

प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिए हम भिन्न को 100 से भाग देते हैं तथा प्रतिशत का संकेत % छोड़ देते हैं।

उदाहरण– 25% को भिन्न में बदलो।

हल– $25\% = 25 \times \frac{1}{100}$ (% प्रतिशत का अर्थ है $\frac{1}{100}$)

$= \frac{1}{4}$

3. प्रतिशत को दशमलव में बदलना–

प्रतिशत को दशमलव में बदलने के लिए हम प्रतिशत का संकेत % छोड़ देते हैं और दशमलव बिन्दु को दो स्थान बाई ओर सरका देते हैं।

उदाहरण– 20% को दशमलव में बदलो।

हल– $20\% = 20 \times \frac{1}{100} = 0.20$

4. किसी राशि का प्रतिशत ज्ञात करना–

उदाहरण– 250 रूपये का 30% ज्ञात कीजिए।

हल— किसी दी हुई संख्या का प्रतिशत निकालने हेतु हम दी हुई संख्या को उसके प्रतिशत से गुणा कर देते हैं। फिर % को हटाकर 100 से भाग देते हैं।

अतः 250 का 30% $= 250 \times 30\%$

$= 250 \times \frac{30}{100}$

$= 75$ रूपये

इसलिए 250 रूपये का 30% $= 75$ रूपये है।

उदाहरण— परीक्षा में मोहन ने 800 में से 480 अंक प्राप्त किए तथा उसकी बहिन ने 500 में से 350 अंक प्राप्त किए तो बताओं किसने अच्छे अंक प्राप्त किये।

हल— मोहन को प्राप्तांकों का प्रतिशत $= \frac{\text{प्राप्तांक} \times 100}{\text{पूर्णांक}} = \frac{480 \times 100}{800}$

$= 60\%$

उसकी बहिन को प्राप्तांकों का प्रतिशत $= \frac{\text{प्राप्तांक} \times 100}{\text{पूर्णांक}} = \frac{350 \times 100}{500}$

$= 70\%$

अतः प्राप्तांकों के आधार पर मोहन की बहिन ने अधिक अच्छे अंक प्राप्त किए।

उदाहरण— भारत की कुल जनसंख्या 100 करोड़ है, यदि प्रतिवर्ष 3/2 प्रतिशत वृद्धि होती है तो वर्ष बाद जनसंख्या क्या होगी।

हल— जनसंख्या में वृद्धि = 100 करोड़ का $\frac{3}{2}\%$

$= 100 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{100}$

$= 1.5$ करोड़

अतः 1 वर्ष बाद कुल जनसंख्या = 100 करोड़ + 1.5 करोड़

= 101.5 करोड़

5. **औसत—** प्रेक्षण के आधार पर प्राप्त भिन्न—भिन्न आंकड़ों का औसत वह राशि है, जो उन आंकड़ों के योगफल को उनकी प्रेक्षण संख्या से विभक्त करने से प्राप्त होता है

$$\text{औसत} = \frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

यदि भिन्न–भिन्न प्रेक्षण $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ हों तो

औसत $= \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots x_n}{n}$

$= \frac{\sum x}{n}$

उदाहरण– एक परिवार के मुखिया, बड़ा पुत्र व छोटे पुत्र की मासिक आय क्रमशः 2600 रूपये 2500 रूपये व 1800 रूपये है। तीनों की औसत आय ज्ञात कीजिए।

हल– औसत $= \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}}$

$= \frac{2600 + 2500 + 1800}{3}$

$= \frac{6900}{3} = 2300$ रूपये

पाठगत प्रश्न–

1. 4 / 5 का प्रतिशत में मान होगा–

   (a) 40% (b) 50% (c) 80% (d) 125%

2. 0.2 का प्रतिशत में मान होगा–

   (a) .002% (b) 20% (c) 2% (d).02%

3. 300 का 10 प्रतिशत होगा–

   (a) 30 (b) 3000 (c) 310 (d) 290

4. 15% का मान होगा–

   (a) 1500 (b) 15/100 (c) 0.015 (d) 1.5

5. 1, 2, 3, 4, 5 का औसत होगा–

   (a) 1 (b) 3 (c) 15 (d) 5

लघुत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक–

1. **लघुत्तम समापवर्त्य– (L.C.M.)**

दी गई संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य वह छोटी से छोटी संख्या है जो दी गई प्रत्येक संख्या से पूरी–पूरी विभाजित हो जाती है। लघुत्तम समापवर्त्य को संक्षेप में ल.स. (L.C.M.) लिखते हैं।

1. उदाहरण– 4 और 6 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– 4 के अपवर्त्य (गुणज) हैं–4, 8, 12, 16, 20, 24................आदि

6 के अपवर्त्य(गुणज) हैं– 6, 12, 18, 24, 30, 36,..............आदि

4 और 6 के समापवर्त्य (उभयनिष्ठ गुणज) अर्थात वे अपवर्त्य जो दोनों में है–12, 24, 36.....................आदि होंगे। अतः 4 एवं 6 का ल.स. अर्थात्

उभयनिष्ठ सबसे छोटा गुणज = 12 उत्तर

2. उदाहरण– 30, 45, 75 का लघुत्तम समापवर्त्य भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

हल–

3	30,	45,	75
5	10,	15,	25
	2,	3,	5

अतः लघुत्तम समापवर्त्य = $3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5$

$= 450$ उत्तर

2. महत्तम समावर्तक–(H.C.F.)

दी गई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक वह बड़ी से बड़ी संख्या है जिससे दी गई संख्याएं पूरी–पूरी विभाजित हो जाती हैं। महत्तम समापवर्तक को संक्षेप में म.स. (H.C.F) लिखते हैं।

उदाहरण– 12 और 18 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– 12 के अपवर्तक (गुणनखण्ड) हैं–1, 2, 3, 4, 6, 12

18 के अपवर्तक (गुणनखण्ड) हैं–1, 2, 3, 6, 9, 18

अतः 12 व 18 के समापवर्तक (उभयनिष्ठ गुणनखण्ड) हैं– 1, 2, 3 और 6

अर्थात् 12 और 18 दोनों ही संख्याएं 1, 2, 3 और 6 से पूरी–पूरी विभाजित होती है। अब चूंकि इनमें से 6 सबसे बड़ी संख्या है, अतः 12 और 18 का म.स. 6 हैं।

उदाहरण– 176, 192, 336 का म.स. ज्ञात करो।

हल– भाग विधि–

$$
\begin{array}{l}
176)\,192\,(1 \\
\quad\ \ \underline{176} \\
\quad\ \ 16)\,176\,(11 \\
\qquad\ \ \underline{16} \\
\qquad\ \ 16 \\
\qquad\ \ \underline{16} \\
\qquad\ \ \ \times
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r|l|l} 16 & 336 & 21 \\ & \underline{32} & \\ & 16 & \\ & \underline{16} & \\ & \times & \end{array}$$

अतः 176, 192, 336 का म.स. (H.C.F.) = 16 उत्तर

1. सर्वप्रथम तीन संख्याओं में से दो संख्या 192 एवं 176 लिया जाता है।
2. छोटी संख्या (176) से बड़ी संख्या (192) को भाग देते हैं।
3. शेषफल 16 जो 176 से कम है अब 16 को भाजक एवं पूर्व के भाजक 176 को भाज्य लेकर भाग देते हैं अब शेष शून्य प्राप्त होता है।
4. अब इसका अन्तिम भाजक 16 से शेष तीसरी संख्या 336 को भाग दिया जाता है।
5. इसमें शेषफल शून्य जाता है।
6. अतः अन्तिम भाजक 16 ही दिये गये तीनों संख्याओं का म.स. है।

3. लाभ–हानि और बट्टा

लाभ–हानिः–

क्रय मूल्य–कोई वस्तु जितने में खरीदी जाती है वह उसका क्रय मूल्य कहलाता है।

उदाहरण– मोहन ने एक घड़ी 105 रू. में खरीदी। तब घड़ी का क्रय मूल्य अर्थात् खरीदी गई कीमत 105 रू. होगी।

विक्रय मूल्य– कोई वस्तु जितने में बेची जाती है वह उसका विक्रय मूल्य कहलाता है।

उदाहरण– सोहन ने अपनी घड़ी 120 रू. में बेची तो घड़ी का विक्रय मूल्य 120 रू. होगा।

लाभ– यदि विक्रय मूल्य का मान क्रयमूल्य से अधिक हो तो विक्रेता को लागत धन राशि से अधिक धनराशि प्राप्त होगी। इस अधिक राशि को हम लाभ कहते हैं।

अर्थात् लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

हानि– यदि क्रयमूल्य का मान विक्रय मूल्य से अधिक हो तो विक्रेता को लागत धन से जितनी कम राशि प्राप्त होगी, उस राशि को हम हानि कहते हैं।

अर्थात् हानि = क्रय राशि – विक्रय राशि

<u>प्रतिशत लाभ, प्रतिशत हानि</u>

$$\text{प्रतिशत लाभ} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

$$\text{प्रतिशत हानि} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

उदाहरण– हरीश ने एक मशीन 1200 रूपये में खरीदी और 1500 रू. में बेच दी तो कितने प्रतिशत लाभ हुआ।

हल– ज्ञात है क्रय मूल्य = 1200 रूपये

विक्रय मूल्य = 1500 रूपये

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

= 1500 – 1200

= 300 रूपये लाभ

$$\% \text{ लाभ} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

$$= \frac{300}{1200} \times 100$$

$$= 25\%$$

<u>बट्टा–</u>

प्रत्येक दुकानदार अपनी वस्तु के लिये अधिक से अधिक मूल्य प्राप्त करना चाहता है, जबकि ग्राहक उसी वस्तु के लिये कम से कम मूल्य देना चाहता है। ग्राहकों को लुभाने के लिये दुकानदार वस्तुओं के अंकित मूल्य पर कुछ छूट या बट्टा घोषित करते हैं ये छूट ग्राहकों को यह विश्वास दिलाने के लिये होती है कि उन्हें वस्तु सस्ती मिल रही है। यह छूट वस्तु के विक्रय हेतु निर्धारित अधिकतम मूल्य जिसमें वस्तु का क्रयमूल्य अथवा लागत तथा दुकानदार का अधिकतम संभावित लाभ सम्मिलित होता है, पर दी जाती है। यह अधिकतम मूल्य, वस्तु का अंकित मूल्य या सूची मूल्य कहलाता है।

इस अंकित मूल्य में की गई कमी बट्टा (Discount) या छूट कहलाती है। बट्टा नगद या वस्तु दोनों रूपों में दिया जाता है। ग्राहक अंकित मूल्य तथा बट्टे के अंतर के बराबर राशि दुकानदार को देता है। इस प्रकार

विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य – बट्टा

$$\text{प्रतिशत में बट्टे की दर} = \frac{\text{बट्टा}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} - \frac{\text{बट्टा प्रतिशत} \times \text{अंकित मूल्य}}{100}$$

$$\text{या विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} \left(1 - \frac{\text{बट्टा}\%}{100}\right)$$

उदाहरण– एक सिलाई मशीन का अंकित मूल्य 1280 रू. है। इस पर दुकानदार 5 प्रतिशत बट्टा देता है तो विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल— मशीन पर अंकित मूल्य = 1280 रूपये

बट्टे की दर = 5%

दिया गया बट्टा = $1280 \times \frac{5}{100} = 64$ रू.

विक्रय मूल्य = $1280 - 64 = 1216$ रू. उत्तर

पाठगत प्रश्न– 2

6. 40 और 50 का लघुत्तम समापवर्त्य होगा।

(a) 90 (b) 200 (c) 20 (d) 4/5

7. 14 और 15 का महत्तम समापवर्तक होगा।

(a) 1 (b) 29 (c) 210 (d) शून्य

8. एक वस्तु का क्रय मूल्य 40 रूपये है 10 % लाभ पर बेची जाती है तो विक्रयमूल्य होगा।

(a) 50 रूपये (b) 30 रूपये (c) 36 रूपये (d) 44 रूपये

9. एक पंखे का मूल्य 600 रूपये है। 5% हानि पर बेचा जाता है तो हानि होगी

(a) 30 रूपय (b) 630 रूपये (c) 270 रूपये (d) 120 रूपये

10. एक वस्तु को 50 रूपये में खरीद कर 60 रूपये में बेचा गया तो लाभ या हानि होगी–

(a) 10 रूपये लाभ (b) 10 रूपये हानि (c) 20 रूपये लाभ (d) 20 रूपये हानि

उपइकाई–तीन

1. सरल ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याजः–

यदि हम कोई धन उधार लेकर निश्चित समय बाद वापस करते हैं तब उधार लिए धन से कुछ अधिक धन वापस करना पड़ता है। उधार लिए धन को हम मूलधन, वापस किए गए धन को मिश्रधन तथा वापस किये गए अधिक धन को ब्याज कहते हैं। प्रति सैकड़ा वार्षिक या प्रति सैकड़ा मासिक इत्यादि अधिक दिए गए धन को ब्याज की दर कहते हैं।

अर्थात् ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

या मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

जब ब्याज की गणना एक निश्चित समय के अन्त में दिए गए मूलधन पर की जाती है तो उसे साधारण ब्याज कहते हैं।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

चक्रवृद्धि ब्याज में एक निश्चित अवधि (सामान्यतः 1 वर्ष) के बाद ब्याज मूलधन में जुड़ जाता है तथा अगले वर्ष नये मिश्रधन पर ब्याज लगता है। यही प्रक्रिया प्रतिवर्ष दोहराई जाती है, यदि ब्याज प्रतिवर्ष संयोजित है।

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन}\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = \text{मूलधन}\left[\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}-1\right]$$

उदाहरण— 500 रूपये का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 5 वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल— मूलधन = 500 रूपये

दर = 10%

समय = 5 वर्ष

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{500 \times 10 \times 5}{100}$$

=250 रूपये उत्तर

उदाहरण— 5000 रू. पर 10% की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल— दिया है—

मूलधन = 5000 रूपये

दर = 10%

समय = 2 वर्ष

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = \text{मूलधन}\left[\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}-1\right]$$

$$5000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^{2}-1\right]$$

$$= 5000\ [(11/10)^2 - 1]$$

$$= 5000\ [121/100 - 1]$$

$$5000\left[\frac{121-100}{100}\right]$$

= 1050 रूपये उत्तर

उदाहरण— एक नगर की जनसंख्या 5% प्रतिवर्ष की दर से बढ़ रही है यदि वर्तमान में नगर की जनसंख्या 16000 हो तो दो वर्ष में इस नगर की जनसंख्या कितनी होगी।

हल— वर्तमान जनसंख्या = 16000

दर = 5 प्रतिशत वार्षिक

समय = 2 वर्ष

दो वर्ष पश्चात् जनसंख्या चक्रवृद्धि ब्याज के निम्न सूत्र से ज्ञात की जायेगी,

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन}\ (1+\frac{\text{दर}}{100})^{\text{समय}}$$

$$= 16000\ (1+\frac{5}{100})^2$$

$$1600\left(\frac{100+5}{100}\right)^2$$

$$1600\left(\frac{105}{100}\right)^2$$

$$16000\times\left(\frac{21}{20}\right)^2$$

$$= 16000\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$$

$$= 17640$$

अतः 2 वर्ष बाद नगर की जनसंख्या 17640 होगी।

2. अनुपात–समानुपात–

अनुपात– यदि एक राशि की तुलना दूसरी राशि से की जाए तो इसे अनुपात के रूप में व्यक्त करते हैं।

अनुपात को भाग की क्रिया के रूप में निम्न प्रकार लिखतें है– जैसे A व B की आय यदि 5000 रूपये व 7000 रूपये है तो इनकी आय का अनुपात होगा।

$$\frac{\text{अ की आय}}{\text{ब की आय}} = \frac{5000}{7000} = \frac{5}{7} = 5:7$$

समानुपात– यदि दो अनुपात समान हों तो वे समानुपाती होते हैं। यदि a:b और c:d बराबर है तो

$$\mathbf{a : b : : c : d}$$

उदाहरण– 250 : 400 को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

हल– $\frac{250}{400} = \frac{5}{8}$

अतः 250 : 400 = 5 : 8

उदाहरण– निम्न में से कौन समानुपात में हैं।

(a) 8, 6, 16 और 12

(b) 3, 4, 2, 6

हल–

(a) 8 : 6 = 4 : 3

तथा 16 : 12 = 4 : 3

अतः 5 : 6 एवं 16 : 12 समानुपात है।

(b) 3 : 4 = 3 : 4

तथा 2 : 6 = 1 : 3

अतः 3 : 4 एवं 2 : 6 समानुपात नहीं है।

2. ऐकिक नियम तथा समय, कार्य एवं दूरी

यदि हमें कुछ इकाइयों का मूल्य, भार या लम्बाई ज्ञात हो तो उनमें इकाइयों की संख्या से भाग देकर उसी प्रकार की एक इकाई का मूल्य, भार या लम्बाई ज्ञात कर लेते हैं, और यदि एक इकाई का मूल्य, भार या लंबाई ज्ञात हो तो उसमें इकाइयों की संख्या से गुणा करके कई इकाइयों का मूल्य, भार या लंबाई ज्ञात कर सकते हैं। इन नियमों का उपयोग कर प्रश्न हल करने की विधि को ऐकिक नियम कहते हैं।

उदाहरण– यदि 9 वस्तुओं का मूल्य 36 रूपये हो, तो एक वस्तु का मूल्य क्या होगा?

हल– $\because$ 9 वस्तुओं का मूल्य है 36 रू.

$\therefore$ 1 वस्तुओं का मूल्य होगा 36/9 = 4 रू.

उदाहरण– यदि एक खिलौने का मूल्य 5 रू. है तो 8 खिलौनों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल– $\because$ 1 खिलौने का मूल्य है 5 रू.

$\therefore$ 8 खिलौनों का मूल्य होगा $5\times8 = 40$ रू.

उदाहरण– यदि 5 मनुष्य 1 काम को 3 दिन में कर सकते हैं तो 1 मनुष्य को उसे करने में कितना समय लगेगा।

हल– $\because$ 5 मनुष्य एक काम को 3 दिनों में कर सकते हैं

$\therefore$ 1 मनुष्य एक काम = $3\times5 = 15$ दिन में कर सकेंगे

उदाहरण– यदि 1 मनुष्य एक काम को 21 दिन में कर सकता है तो उसी काम को 3 मनुष्य कितने दिन में करेंगे?

हल– $\because$1 मनुष्य एक काम 21 दिन में करते हैं

$\therefore$3 मनुष्य 1 काम = 21/3 = 7 दिन में करेंगे

जैसे ऊपर के दो उदाहरण दिये गये हैं, ऐसे प्रश्नों को हल करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि काम करने वालों की संख्या में अधिकता होने से, दिनों की संख्या में न्यूनता होगी और

इसके विपरीत काम करने वालों की संख्या में कमी होने से काम करने के दिनों की संख्या में वृद्धि होगी।

3. वर्गमूल एवं उनके अनुप्रयोग–

हम जानते है कि $2^2 = 4$ अर्थात 2 का वर्ग 4 है, इसके विपरीत हम कह सकते हैं कि 2, 4 का वर्गमूल है।

इसी प्रकार $5^2 = 25$ इसलिए 25 का वर्गमूल 5 है। अतः किसी संख्या a का वर्गमूल वह संख्या होती है, जिसे इसी संख्या से गुणा करने पर संख्या 'a' प्राप्त होती है। वर्गमूल का संकेत $\sqrt[2]{\ }$ होता है। इसे $\sqrt{\ }$ से भी दर्शाया जाता है।

उदाहरण– 25 के वर्गमूल को हम $\sqrt{25}$ लिखते हैं।

अतः $\sqrt[2]{25} = \sqrt[2]{5\times5} = \sqrt[2]{5^2} = 5$

या $\sqrt{25} = 5$

वर्गमूल ज्ञात करना–

(a) पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है इसके लिये

चरण– 1 दी गई संख्या के सभी संभव गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

चरण–2 दो–दो समान अभाज्य गुणनखण्डों की जोड़ी बनाइए।

चरण–3 प्रत्येक जोड़े मे से एक एक गुणनखण्ड लेकर उनका आपस में गुणा कीजिए।

चरण–4 प्राप्त गुणनफल ही, दी गई संख्या का अभीष्ट वर्गमूल होगा।

उदाहरण– 4900 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए–

हल–

2	4900
2	2450
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

$$\because 4900 = 2\times2\times5\times5\times7\times7$$

$$\therefore \sqrt{4900} = \sqrt{2\times2\times5\times5\times7\times7}$$

$$= \sqrt{2^2\times5^2\times7^2}$$

$$= 2\times5\times7$$

$$= 70$$

भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करना–

उदाहरण— 1296 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल—

	36
3	1296
+3	9
66	396
+6 396	
72 0	

$\therefore$ 1296 का वर्गमूल = 36

चरण—1 दी गई वर्ग संख्या के इकाई अंक से प्रारम्भ करके दो—दो अंकों के जोड़े बनाने के लिए उन पर रेखाएं (दंड) लगाते हैं। जैसे $\overline{12}\,\overline{96}$

चरण—2 वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करें जिसका वर्ग सबसे बाईं ओर के दंड के नीचे लिखी संख्या से छोटा या बराबर हो। इस संख्या को भाजक और भागफल मानिए। भागफल को प्रथम अंतराल के ऊपर लिखिए। प्रथम अंतराल में से वर्ग संख्या को घटाकर, शेषफल के दाई ओर अगले जोड़े अंक को लिखिए। यही संख्या अगले पद के लिए भाज्य होगी।

चरण—3 उपर्युक्त पद के भागफल अर्थात 3 को दो गुना करके भाज्य के बाईं ओर लिखिए। इस संख्या के दाहिनी ओर एक अंक के लिए रिक्त स्थान मानकर छोड़ें।

चरण—4 इस रिक्त स्थान को भरने के लिए बड़े से बड़े अंक की खोज इस प्रकार करें कि यह अंक भागफल का अगला अंक बन जाए। इस अंक को रिक्त स्थान और अगले अंतराल के ऊपर भी लिखिए। इस अंक से भाजक को गुणा करके गुणनफल को 396 के नीचे लिखकर शेषफल 0 प्राप्त होता है।

अतः $\sqrt[2]{1296} = 36$ होगा।

पाठगत— प्रश्न 3

11. समान अनुपात है

(a) 2 : 3 एवं 4 : 5 (b) 2 : 3 एवं 4 : 8 (c) 2 : 3 एवं 6 : 7 (d) 2 : 3 एवं 6 : 9

12. 3 मनुष्य एक काम को 6 दिन में कर सकते हैं तो एक मनुष्य उस काम को करेगा।

(a) 9 दिन में (b) 18 दिन में (c) 3 दिन में (d) 2 दिन में

13. 200 रू. का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 1 वर्ष का सरल ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज का अंतर होगा।

(a) 5 रूपये (b) 0 (c) 200 रूपये (d) 10 रूपये

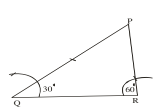
14. एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 64 वर्ग मी. है तो उसकी लम्बाई होगी।

(a) 8 मीटर (b) 16 मीटर (c) 256 मीटर (d) 4096 मीटर

15. $\sqrt{16/25}$ का मान होगा।

(a) 4 : 5 (b) 4×5 (c) 16×25 (d) 4+5

इकाई सारांश–

- किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिये भिन्न में 100 का गुणा करके % का चिन्ह लगाते हैं।
- किसी प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिये 100 से भाग दिया जाता है तथा % का चिन्ह छोड़ देते हैं।
- प्रतिशत को दशमलव में बदलने के लिये हम प्रतिशत का चिन्ह हटाकर दशमलव बिन्दु को 2 स्थान बाई ओर सरका देते हैं।
- औसत $= \dfrac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}} = \dfrac{\sum x}{n}$
- लघुत्तम समापवर्त्य– वह छोटी से छोटी संख्या जो दी गई संख्याओं से पूरी पूरी विभाजित हो जाती है।
- महत्तम समापवर्तक – वह बड़ी से बड़ी संख्या जो दी गई संख्याओं को पूरा पूरा विभाजित करती है, महत्तम समापवर्त्य कहलाती है।
- लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य
- हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य
- लाभ प्रतिशत में $= \dfrac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$
- हानि प्रतिशत में $= \dfrac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$
- साधारण ब्याज $= \dfrac{\text{मूलधान} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$
- चक्रवृद्धि मिश्रधन = मूलधान 
- यदि $a : b : : c : d$ हो तो $ad = bc$
- यदि $a^2 = b$ हो तो $\sqrt{b} = a$

आत्म परीक्षण– के प्रश्न

1. दी गई संख्याओं को प्रतिशत रूप में व्यक्त कीजिए

(अ) 3 / 25 (ब) 24 / 5 (स) 0.25 (द) 1.3

2. किसी शहर की जनसंख्या का 52% पुरूष है यदि इस शहर की जनसंख्या 128200 हो तो शहर में महिलाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।
3. एक सेव की टोकरी में 500 सेव थे। इनमें से 25 सेव सड़ गये। टोकरी में अच्छे सेव का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
4. पॉच लड़कों की उम्र 18, 15, 10, 9 और 8 वर्ष है तो इनकी उम्र का औसत ज्ञात कीजिए।
5. ऐसी कौन सी सबसे छोटी संख्या है जो 12, 18 और 30 से पूरी पूरी विभाजित हो जाती है।
6. तीन मनुष्य प्रति दिन क्रम में 10, 15 और 18 किमी. चलते हैं। तो सबसे कम ऐसी दूरी बताओ जिसके चलने में प्रत्येक को पूरे पूरे दिवस लगें।
7. इनका महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

   (1) 48 और 144 (2) 16, 24, 140
8. एक दुकानदार ने एक मेज 3200 रूपये में खरीदी और 4000 रूपये में बेच दी उसका प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।
9. एक वस्तु को 450 रूपये में बेचने पर समीर को 50 रूपये की हानि होती है। 20 प्रतिशत लाभ पाने के लिए समीर को वह वस्तु कितने में बेचनी चाहिए।
10. नलिनी ने अपनी सहेली से 550 रूपये 6 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से उधार लिए उसने छह माह बाद उधार लिये रूपये चुका दिये। बताइये उसने कितने रूपये वापिस लौटाए होंगे।
11. 4000 रूपये का 2 वर्ष का 5 प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की दर से मिश्रधन ज्ञात कीजिए।
12. उस मूलधन पर 5 प्रतिशत वार्षिक की दर पर 3 वर्ष का चक्रवृद्वि ब्याज ज्ञात कीजिये जो 5% की दर पर 3 वर्ष में वार्षिक 1200 रू. साधारण ब्याज देता है।
13. एक विद्यालय में बालकों और बालिकाओं की संख्या क्रमशः 384 और 480 है। बालकों एवं बालिकाओं की संख्याओं का अनुपात सरलतम रूप में ज्ञात कीजिए।
14. एक पार्क की लंबाई और चौड़ाई में 5 : 3 का अनुपात है। यदि पार्क की चौड़ाई 96 मीटर है, तो पार्क की लंबाई ज्ञात कीजिए।
15. एक मजदूर के 6 दिन के कार्य की मजदूरी 540 रू. है। 17 दिन के कार्य की मजदूरी क्या होगी?

<u>चर्चा तथा स्पष्टीकरण के बिन्दु–</u>

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप किन्ही बिन्दुओं पर और आगे चर्चा या कुछ बिन्दुओं पर स्पष्टीकरण चाहते हैं तो उन्हें नीचे लिखिए।

चर्चा के बिन्दु–

....
....
....

स्पष्टीकरण के बिन्दु—

....
....
....

आत्म परीक्षण प्रश्नों के उत्तर

1. (अ) 12 प्रतिशत (ब) 480 प्रतिशत (स) 25 प्रतिशत (द) 130 प्रतिशत
2. 61536
3. 95 प्रतिशत
4. 12 वर्ष
5. 180
6. 90 किमी.
7. (अ) 48 (ब) 4
8. 25 प्रतिशत लाभ
9. 600 रूपये
10. 566.50 रूपये
11. 4410 रूपये
12. 1261 रूपये
13. 4 : 5
14. 160 मी.
15. 10 रूपये

पाठगत प्रश्नों के उत्तर –

1. 80 प्रतिशत (c) 2. 20 प्रतिशत (b) 3. 30 (a) 4. 15 ⁄ 100 5. (b) 3 6. 2000 (b) 7. 1 (d) 8. 44 रू. (d) 9. 30 रू. (a) 10. 10 रू. लाभ (a)

पाठगत प्रश्न 3 के उत्तर

11. 2 : 3 एवं 6 : 9 (d) 12. 18 दिन में (b) 13. 0 14. 8 मी. 15. $\frac{1}{5}$

इकाई – 3 **सूचकांक –डी. एड./V/ 3**

पत्राचार पाठ्यक्रम

माध्यमिक शिक्षा मडंल, म.प्र. भोपाल

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

विषय – गणित और उसका शिक्षण **प्रश्न पत्र– पंचम** **पाठ क्रमांक – तीन**

विषयांश

उपइकाई एक

1. प्राकृत संख्याऐं 2.पूर्ण संख्याऐं 3. पूर्णाक संख्याऐं 4.परिमेय संख्याएं 5 परिमेय संख्याएं पर मूलभूत संक्रियाएँ 6.परिमेय संख्याओं में क्रय विनिमय नियम 7.साहचर्य नियम 8. वितरण का नियम 9. अपरिमेय संख्याएं10 अपरिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपण करना 11.सान्त दशमलव एवं असान्त दशमलव

उपइकाई दो

1. करणी 2. करणियों के नियम 3. करणियों का योग एवं व्यवकलन 4. करणी का परिमेय करण

उपइकाई तीन

1. वास्तविक संख्याएं 2. कालपनिक संख्याएँ

उपइकाई चार

घात एवं घातांको के नियम

इकाई सारांश

आत्म बोध प्रश्न

नियत कार्य / गति विधियाँ, चर्चा एवं स्पष्टिकरण के बिन्दु

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

प्रस्तावना –

संख्याओं का कब और कैसे आविर्भाव हुआ इसकी पर्याप्त जानकारी नहीं है। परन्तु यह समझा जा सकता है कि जब मनुष्य को अपना और अपने से विभिन्न अर्थात अन्य का ज्ञान हुआ होगा, संख्या में एक और अनेक का उदय माना जा सकता है। विश्व की वर्तमान अंक प्रणाली का जन्म भारत में हुआ ।

यहाँ से यह अरब देशों से होती हुई यूरोप के देशों में पहुँची । इसलिये अंको को हिन्दु अरेबिक अंक कहा जाता है।

उपइकाई – एक

1. **प्राकृत संख्याएँ** – मानव ने सबसे पहले गिनना सीखा और 1.2.3.4........................ आदि संख्याओं की खोज की । क्योंकि ये संख्याएँ प्रकृति की देन हैं अतः इन्हें प्राकृत संख्याएँ कहते हैं। ध्यान रखिए प्राकृत संख्याओं में शून्य (0) का स्थान नहीं है एवं प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को N से प्रदर्शित किया जाता है। $N=\{1,2,3,4..............\}$

2. **पूर्ण संख्याएँ** – यादि प्राकृत संख्याओं में 0 को सम्मिलित कर लिया जाये तो पूर्ण संख्याएँ प्राप्त होती है। इसे w से प्रदर्शित करते हैं। $w=\{0,1,2,3,4.................\}$

3. **पूर्णाक संख्याएँ** – संख्याओं का वह समुच्चय जिसमें 0, घन पूर्णाक और ऋण पूर्णाक सम्मिलित हों पूर्णाक संख्याओं का समुच्चय कहलाता है। इसे I से प्रदर्शित करते हैं।

   $I=\{................-3,-2,-10,01,2,3,............\}$

4. **परिमेय संख्याएँ** – $\frac{p}{q}$ के रूप की वे संख्याएं जिसमें p,q कोई पूर्णाक हों किन्तु $q\neq 0,$ परिमेय संख्याएं कहलाती हैं।

उदाहरण– $-\frac{2}{3},\frac{5}{7},2,9,0,\frac{3}{5},\frac{-1}{15}$ आदि परिमेय संख्यायें हैं।

5. **परिमेय संख्याओं पर मूलभूत संक्रियाएँ**

   परिमेय संख्याओं का योग–

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ परिमेय संख्यायें हों तो

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ (जबकि $b,d\neq 0$)

उदाहरण–

(1) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\times 5+4\times 3}{3\times 5}=\frac{22}{15}$

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{2\times 3}=\frac{5}{6}$

(3) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3+4}{5}=\frac{7}{5}$

<u>परिमेय संख्याओं का अन्तर</u>

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ परिमेय संख्याएं हो तो

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ (जबकि $b,d\neq 0$)

उदाहरण –

(1) $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$

(2) $\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{2\times5-2\times3}{3\times5}=\frac{4}{15}$

परिमेय संख्याओं का गुण

यादि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएँ हैं तथा दोनों अशून्य हैं तो

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

उदाहारण

$\frac{3}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{3\times1}{8\times7}=\frac{3}{56}$

परिमेय संख्याओं का भाग –

यादि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएँ हैं तथा दोनों अशून्य हैं तो $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

उदाहारण

$\frac{3}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{3\times3}{2\times5}=\frac{9}{10}$

6. परिमेय संख्याओं में क्रम विनिमेय नियम –

परिमेय संख्याओं में क्रम बदलकर उन्हें जोडने से योगफल का मान नहीं बदलता है, इन्हें क्रम विनिमेय नियम कहते हैं। यदि a और b दो परिमेय संख्याऐं हैं तो योग के क्रय विनिमेय नियमानुसार

$a+b=b+a$

उदाहरण– $\frac{3}{4}+\frac{3}{5}=\frac{15+12}{20}=\frac{27}{20}$

$\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=\frac{12+15}{20}=\frac{27}{20}$

$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}+\frac{3}{4}$ (क्रम विनिमेय नियमं)

परिमेय संख्याओं में क्रम बदलकर गुणा करने पर गुणन में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

यदि a और b दो परिमेय संख्यायें हैं। तो गुणा के क्रम विनिमेय नियम से $a\times b=b\times a$

उदाहरण– $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

$\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

अतः $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}$ (गुणा का क्रम विनिमेय नियम)

परिमेय संख्यायें घटाने तथा भाग की संक्रिया में क्रम विनिमेय नियम का पालन नहीं करती है।

7. साहचर्य नियम

तीन परिमेय संख्याओं को इस प्रकार जोडें कि संख्याओं का क्रम न बदले केवल उनका साथ बदल जाये तो योगफल प्रत्येक दशा में वही रहता है। इस गुण को सांहचर्य नियम कहते हैं।

यदि a,b और c तीन परिमेय संख्साएं हैं

तो इस नियमानुसार $(a+b)+c=a+(b+c)$

उदाहरण–

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{7}=\left(\frac{6+4}{8}\right)+\frac{3}{7}$$
$$=\frac{10}{8}+\frac{3}{7}$$
$$=\frac{70+24}{56}$$
$$=\frac{94}{56} \quad \text{..........................(i)}$$

तथा

$$\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right)$$
$$=\frac{3}{4}+\left(\frac{7+6}{14}\right)$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{13}{14}$$
$$=\frac{42+52}{56}$$
$$=\frac{94}{56} \quad \text{.......(ii)}$$

अतः $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{7}=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right)$ योग का साहचर्य नियम

इसी प्रकार यदि तीन परिमेय संख्याओं का क्रम न बदले, केवल साथ बदलकर गुणा करें तो गुणनफल प्रत्येक दशा में वही रहता है।

यदि a,b और c तीन परिमेय संख्यायें है तो इस

नियमानुसार $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

उदाहरण $\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{3}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{40}$

तथा $\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{9}{20}=\frac{9}{40}$

अत : $\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}\right)$ गुणन का साहचर्य नियम

8. वितरण का नियम – यदि दो परिमेय संख्याओं के योगफल को किसी भी परिमेय संख्याओं से गुणा कर गुणनफल निकालने पर जो परिणाम प्राप्त होता है वही परिणाम प्राप्त होता है यदि उन दो में से प्रत्येक परिमेय संख्या को उसी तीसरी परिमेय संख्या से अलग–अलग कर उनका योगफल निकालें

यदि a,b और c तीन परिमेय संख्यायें हैं तो वितरण के नियमानुसार

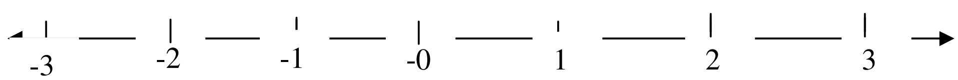
$(a+b)\times c=a\times b+a\times c$

उदाहरण

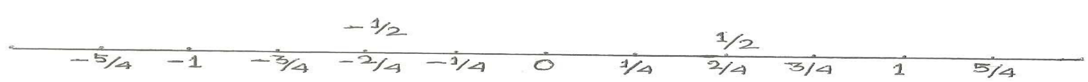
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}$$

हल स्वयं करके देखें।

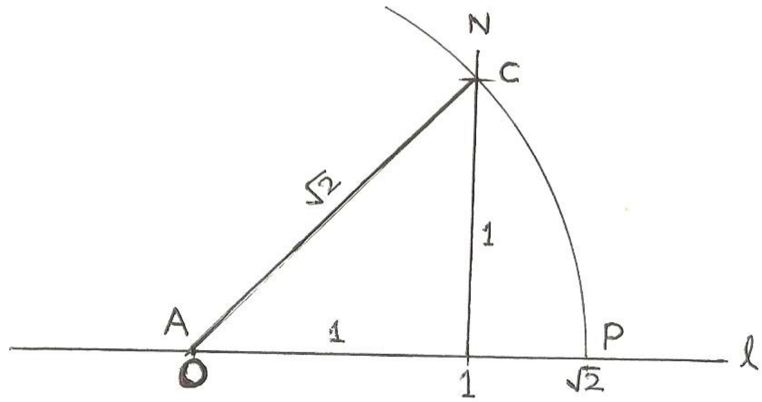
9. अपरिमेय संख्याएँ – वे संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं कर सकते हैं (जहॉ p व q पूर्णांक है परन्तु $q\neq o$) अपरिमेय संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे $-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$ आदि या वे संख्याएं जो परिमेय नहीं हैं वे अपरिमेय संख्याएं कहलाती हैं। संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं का निरूपण हम किसी परिमेय संख्या $\frac{P}{q}$ को एक रेखा जो दोनों और अनंत है, पर निरूपण पर विचार करेंगे।



संख्या रेखा पर किसी परिमेय संख्या को निरूपण करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि $q\neq 0$ तथा p एवं q में 1के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ट गुणनखण्ड न हो अर्थात $\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}$ आदि का संख्या रेखा पर निरूपण इस प्रकार किया जा सकता है।



10. अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर निरूपण करने के लिये संख्या रेखा ℓ पर बिन्दु O को A से तथा बिन्दु 1 को B से व्यक्त कीजिये। तब रेखाखण्ड A B की लम्बाई एक इकाई है। अब बिन्दु B पर BN एक रेखा खीचियें जो ℓ पर लम्ब हो । इस लम्ब मे ंसे एक



इकाई लम्बाई का रेखा खण्ड़ BC काट लीजिए A को केन्द्र मानकर, AC त्रिज्या का एक चाप खीचिए जो रेखा ℓ को बिन्दु P पर काटती है। जैसा चित्र में दिखाया गया है। तब AP=Ac , अब पायथागोरस के प्रमेय से ΔABC में $AC=\sqrt{2}$ अतः $AP=\sqrt{2}$ होगा । इस प्रकार संख्या रेखा पर बिन्दु p अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}$ का निरूपण करेगा।

पाठगत प्रश्न

प्रश्न–1 उन नियमों के नाम बताइए जो निम्न सत्य कथनों पर लागू होता है।

$(a)\quad 5+4=4+5$

$(b)\quad \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{5}\right)\times\frac{1}{3}$

$(c)\quad \frac{5}{11}\times\left(\frac{6}{13}+\frac{7}{15}\right)=\frac{5}{11}\times\frac{6}{13}+\frac{5}{11}\times\frac{7}{15}$

$(d)\quad (9+11)+13=9+(11+13)$

$(e)\quad \frac{9}{7}\times\left(\frac{1}{9}\times\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{9}{7}\times\frac{1}{9}\right)\times\frac{3}{5}$

प्रश्न–2

अ. सबसे छोटी प्राकृत संख्या बताइऐ।

ब. दो पूर्णाक संख्याओं के बीच कितनी परिमेय संख्यऐं होती है।

स. निम्न में प्राकृत संख्याऐं बताएँ।

$6,-11,\ 0,\frac{3}{13},\sqrt{5}$

द. निम्न में से अपरिमेय संख्या बताएँ।

$6,-11,\ 0,\frac{3}{13},\sqrt{5}$

11. **सान्त दशमलव एवं असान्त दशमलव –** यदि साधारण भिन्न को दशमलव भिन्न में बदलने के समय भाग की क्रिया समाप्त हो जाती है अर्थात शेषफल शून्य हो जाती है। तथा भागफल में अंको की आवृत्ति नहीं होती, तब ऐसी भिन्न संख्या को सान्त दशमलव भिन्न कहते हैं।

जैसे– $\frac{2}{5} = 0.4, \frac{1}{8} = 0.125$

इसके अतिरिक्त यदि साधारण भिन्न को दशमलव भिन्न में बदलने के समय भाग की क्रिया कभी समाप्त नहीं होती है और भागफल में अंकों की पुनः आवृत्ति होने लगती है। उसे आवर्त्त दशमलव भिन्न कहते हैं।

$\frac{5}{11} = 0.454545........$

आवृति वाले अंकों के ऊपर बिन्दु या रेखाखण्ड लिखते हैं।

जैसे

$$\frac{5}{11} = 0.\overline{45}$$

एवं $$\frac{1}{3} = 0.3333$$

$$= 0.\bar{3}$$

नोट :– जिन भिन्न संख्याओं के हर के 2 व 5 के अतिरिक्त अन्य गुणनफल भी होते हैं। वो भिन्न अशांत दशमलव भिन्न होती है।

उपइकाई – दो

1. करणी – यदि a एक धन परिमेय संख्या है जिसे किसी परिमेय संख्या के n वें घात के रूप में प्रकट नहीं कर सकते, को $\sqrt[n]{a}$ या $a^{\frac{1}{n}}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है अर्थात a के n वें मूल को $\sqrt[n]{a}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है प्रतीक $\sqrt[n]{a}$ को करणी चिन्ह कहते हैं जिसमें n को करणी घात एवं a को करणीगत कहते हैं तथा $\sqrt[n]{a}$ एक अपरिमेय संख्या होगी।

सरल शब्दों में हम कह सकते हैं कि जिन संख्याओं का वर्गमूल आसानी से ज्ञात नहीं किया जा सकता है उसे ही हम करणी कहते हैं और ये अपरिमेय संख्या होती हैं।

उदाहरण (1) $\sqrt[3]{5}$ का कारणी घात 3 है।

(2) $\sqrt{10}$ का करणी घात 2 है।

(3) $\sqrt{64}$ एक करणी नहीं है। क्योंकि 64 परिमेय संख्या 8 का वर्ग है। $8^2 = 64$

(4) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है परन्तु यह एक करणी नहीं है क्योकि $3+2\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है

2 करणियों के नियम

(i) यदि n कोई धन पूर्णांक हों और a एक घन परिमेय संख्या हो तब

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

(ii) यदि $\left(\sqrt[n]{a}\right)$और $\left(\sqrt[n]{b}\right)$एक ही घात की दो करणियां हैं

तब $\left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$

(iii) यदि $\sqrt[n]{a}$ और $\sqrt[n]{b}$ एक ही घात की दो करणियाँ है

तब $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \dfrac{a}{b}$

(iv) यदि m,n दो घन पूर्णाक हो तो किसी भी धन परिमेय संख्या a के लिये
उदाहरण

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

उदाहरण

(1) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

(2) $\sqrt{125} = \sqrt{25\times5} = \sqrt{5^2\times5} = 5\sqrt{5}$

(3) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{\sqrt[3]{(4)^3}} = 2$

$\sqrt[6]{2^6} = 2$

3. करणियों का योग एंव व्यवकलन – चुंकि करणियाँ वास्तविक संख्यायें हैं अतः इन पर बंटन नियम लागू होता है। इस प्रकार

(1) $5\sqrt{2}+4\sqrt{2} = (5+4)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

(2) $4\sqrt{7}+5\sqrt{7}-3\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$

यहाँ ध्यान दीजिए कि $5\sqrt{2}$ और $4\sqrt{2}$ में से प्रत्येक का अपरिमेय गुणनखण्ड समान है। जिन करणियों में अपरिमेय गुणनखण्ड समान है उन्हें समरूप करणियाँ कहते हैं। एवं बंटन नियम की सहायता से समरूप करणियों को जोड़ा या व्यवकलन किया जा सकता है।

करणी का परिमेयकरण – जब दो करणियों का गुणनफल एक परिमेय संख्या हो तो उनमें से प्रत्येक को दूसरे का परिमेयकारी गुणक कहते हैं।

उदाहरण :–

$2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=2\times5=10$ एक परमिय संख्या है

अतः $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ का परिमेयकारी गुणक है।

इसी प्रकार

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=1$ एक परिमेय संख्या

अतः $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ का परिमेयकारी गुणक हैं।

एक पदी करणी का परिमेयकरण

एक पदी करणी के परिमेयकारी गुणक को इन उदाहरणों द्वारा समझा जा सकता है।

उदाहरण 1.

$\sqrt{32}$ का एक सरलतम परिमेयकारी गुणक ज्ञात कीजिये

हल $\sqrt{32}=\sqrt{2\times2\times2\times2\times2}$

$=\sqrt{2^2\times2^2\times2}$

$=4\sqrt{2}$

अब $4\sqrt{2}\times\sqrt{2}=8$ एक परिमेय संख्या

अतः $\sqrt{2}, \sqrt{32}$ का सरलतम परिमेयकारी गुणक है।

उदाहरण 2 व्यंजक $\frac{2}{\sqrt{7}}$ को परिमेय हर वाले व्यंजक के रूप में लिखिए।

हल $\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}}$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

उपइकाई – तीन

1 वास्तविक संख्याएँ

परिमेय संख्याओं व अपरिमेय संख्याओं का सम्मिलित रूप वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं इसे R से प्रदर्शित करते है।

- वास्तविक संख्याएँ
  - परिमेय संख्यायें
    - पूर्णांक
      - ऋणात्मक पूर्णांक
      - शून्य
      - घनात्मक पूर्णांक (प्राकृतसंख्याएं)
    - भिन्न संख्याएँ
  - अपरिमेय संख्यायें

2. काल्पनिक संख्यायें –

हम जानते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या का वर्ग हमेशा घनात्मक संख्या होता है। चाहे वह संख्या धन हो ऋण अर्थात ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है जिसका वर्ग ऋणात्मक संख्या है। अतः किसी ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल निकालें तो वह वास्तविक संख्या नहीं होगी। जैसे

$x = \pm\sqrt{-4}$

$= \pm 2\sqrt{-1}$ आता है।

अतः ऐसी सभी संख्यायें जिनके वर्गमूल वास्तविक संख्या न हो अवास्तविक संख्यायें होती हैं। इन अवास्तविक संख्याओं को सर डेमिल्टन ने कालपनिक संख्या नाम दिया आगे चलकर यूलर ने इस काल्पनिक $\sqrt{-1}$ को i आयोटा (Iota) से निरूपित किया

अतः $i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

इस प्रकार संख्यायें $2i, 3i, 4i$ अदि सभी कालपनिक संख्याएँ है जिनके वर्ग ऋण संख्याऐं होती है। जैसे

$(4i)^2 = -16$

$(2i)^2 = -4$

$(5i)^2 = -25$ आदि

पाठगत प्रश्न

प्रश्न – निम्न में सान्त दशमलव भिन्न वाली संख्यायें बताएँ

$(a)\ \frac{2}{5}\ (b)\ \frac{1}{3}\quad (c)\frac{11}{2}\quad (d)\frac{1}{125}$

4. निम्न में सान्त दशमलव वाली संख्याएँ बताएँ

$(a)\ \frac{2}{9}\ (b)\ \frac{1}{7}\quad (c)\frac{7}{8}\quad (d)\frac{1}{27}$

5. निम्न में करणी संख्यायें बताएँ

$(a)\ \sqrt{5}\ (b)\ \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\quad (c)\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\quad (d)\sqrt{\sqrt{2}}$

6. निम्न में अवास्तविक संख्या बताएँ

$(a)\ \sqrt{5}\ (b)\ -11\quad (c)\frac{2}{5}\quad (d)\sqrt{-3}$

7. निम्न में अपरिमेय संख्या बताएँ

(a) 1.333............. (b) 1.10110010110001001.................

(c)1.5 (d)1.101010101.......................

उपइकाई – चार

1. घात एवं घातांकों के नियम – संख्या 64 को $4\times4\times4$ अर्थात 4^3 के रूप में व्यक्त करते हैं। 4^3 को हम चार पर घात तीन पढ़ते हैं। पहले भाग (4) को आधार एवं दूसरे भाग (3) को घात कहते हैं।

$256 = 2^8$

इसी प्रकार $81 = 3^4$ आदि

जिन संख्याओं को बार–बार गुणा किया जाता हैं। उन्हें आधार कहते हैं तथा इन संख्याओं के ऊपर लागाये गये अंकों को घात कहते हैं।

पहला नियम – एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं के गुणफल में आधार तो वही बना रहता है और घातांक जुड़ जाते हैं।

जैसे $\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$ उदाहरण $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

दूसरा नियम –

यदि आधार एक ही हों तो घातीय संख्याओं में भाग संक्रिया करने पर भागफल में आधार तो वही बना रहता है परन्तु उसका घातांक प्राप्त करने के लिये भाज्य के घातांक में से भाजक के घातांक को घटा दिया जाता है।

अर्थात $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

उदाहरण $\dfrac{4^5}{4^6} = 4^{5-6} = 4^{-1}$

तीसरा नियम –

घात की घात का मान निकालने के लिये घातांकों का परस्पर गुणा हो जाता है।

अर्थात् $\boxed{(a^m)^n = a^{m\times n}}$

उदाहरण $(6^5) = 6^{5\times3} = 6^{15}$

शून्य घातांक

0 घात वाली किसी भी संख्या (0 के अतिरिक्त) का मान सदैव 1 होता है। आर्थात $a^0 = 1$ (जबकि $a \neq 0$)

उदाहरण $5^0 = 1, (15)^0 = 1$

ऋण घातांक –ऋण घातांक वाली संख्या ऐसी भिन्न संख्या के बराबर होती है जिसका अंश 1 और हर घनात्मक घातांक के साथ वही संख्या होती है।

अर्थात $\boxed{a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}}$ एंव $\boxed{a^m = \dfrac{1}{a^{-m}}}$

उदाहरण

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3}$$

$$2^3 = \frac{1}{2^{-3}}$$

अलग अलग संख्याओं पर एक ही घातांक हो तेा

$$\boxed{(a\times b)^n = a^n \times b^n}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

उदाहरण

$$(5\times3)^2 = 5^2\times3^2$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{7^3}{3^3}$$

उदाहरण 1. $(16)^{\frac{1}{4}}\times(81)^{\frac{1}{4}}$

हल

$$(16)^{\frac{1}{4}}\times(81)^{\frac{1}{4}} = (16\times81)^{\frac{1}{4}}$$

$$(2\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times3)^{\frac{1}{4}}$$

$$= (2^4\times3^4)^{\frac{1}{4}}$$

$$(2\times3)^{4\times\frac{1}{4}}$$

$$= 6$$

उदाहरण 2. $(9^3)^{-\frac{2}{3}}$ को हल कीजिए।

हल

$$(9^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(9^3)^{-\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{9^2}$$

$$= \frac{1}{81}$$

उदाहरण 3. $21^{\frac{5}{3}} \div 21^{\frac{2}{3}}$ को इल कीजिए।

हल

$$= 21^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}$$

$$= 21^{\frac{5-2}{3}}$$

$$= 21^{\frac{3}{3}}$$

$$= 21$$

इकाई सारांश

1. प्राकृत संख्याएँ

वस्तुओं की गणना में जिन संख्याओं का प्रयोग किया जाता है। उन्हें हम प्राकृत संख्याएँ कहते हैं।

2. पूर्ण संख्या प्राकृत संख्याओं में 0 को सामिल कर लिया जाये तो पूर्ण संख्या समुच्चय बनता है। उदाहरणार्थ $\{0,1,2,3,4,5................\}$

3. पूर्णाक संख्या – संख्याओं का वह समुच्चय जिसमें प्राकृत संख्याएँ शून्य तथा ऋणात्मक प्राकृत संख्याएँ शामिल हो पूर्णाक संख्याओं का समुच्चय कहलाता है। उदाहरणार्थ $I=\{..............-3,-2,-1,0,1,2,3................\}$

4.परिमेय संख्याएँ – वह संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सके जबकि p और q पूर्णांक है और $q\neq 0,$ परिमेय संख्या कहलाती है।

जैसे $-\frac{2}{3},\frac{5}{7},2,0,\frac{-3}{5}$

5. अपरिमेय संख्याएं – अपरिमेय संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है।

6. उपरोक्त सभी संख्या समुच्चय वास्तविक संख्याएँ कहलाती है।

7. वास्तविक संख्यायें क्रम विनिमेय नियम, साहचर्य नियम तथा वितरण नियम का पालन करती है।

8. $\sqrt{-1}=i$ कालपनिक संख्या है।

9. घातांकों के नियम

$(a)\ a^m\times a^n=a^{m+n}$ $\qquad (d)\ a^0=1$

$(c)\ a^m\div a^n=a^{m-n}$ $\qquad (e)\ a^{-1}=\frac{1}{a}$

$(e)\ (a^m)^n=a^{mn}$

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

1. (a)क्रम विनिमेय नियम (b)क्रम विनिमेय नियम (c)वितरण नियम (d)साहचर्य नियम (e)साहचर्य नियम
2. (a) 1 (b) अनंत (c) 6, (d) $\sqrt{5}$
3. $(b)\ \frac{1}{3}$
4. $(c)\ \frac{7}{8}$
5. $\sqrt{5}$ एवं $\sqrt{\sqrt{2}}$
6. $\sqrt{-3}$

7. a एवं c

आत्म बोध प्रश्न

1. निम्नलिखित की परिभाषा लिखिये

(a)प्राकृत संख्याएँ (b) पूर्ण संख्याएँ (c) परिमेय संख्याएँ (d) अपरिमेय संख्याएँ

(e)वास्तविक संख्याएँ

2. सरल करो

a. $(x^m)^n \div (x^n)^m$

b. $\left(\dfrac{a^m}{a^n}\right)^{m+n} \times \left(\dfrac{a^n}{a^p}\right)^{n+p} \times \left(\dfrac{a^p}{a^m}\right)^{p+n}$

c. निम्न लिखित भिन्न संख्याओं को दशमलव में परिवर्तित करों

d. $a.\dfrac{1}{7}\ \ b.\ \dfrac{2}{3}\ \ c.\dfrac{9}{13}$

3. $\sqrt{3}$ को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।

4. निम्न के हर का परिमेय करण कीजिए।

$a.\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\ \ b.\ \dfrac{1}{\sqrt{11}}\ \ c.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$

5. $\dfrac{1}{(16^2)^{\frac{-1}{4}}}$ को हल कीजिए।

चर्चा और स्पष्टीकरण के बिन्दु

इस इकाई को पढने के पश्चात आप किन्ही बिन्दुओं पर और आगे चर्चा या कुछ बिन्दुओं पर स्पष्टीकरण चाहेंगे। उन्हे नीचे लिखिए।

चर्चा के बिन्दु

____

____

____

स्पष्टीकरण के बिन्दु

____

____

____

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

1. वृहत कोण 2. असमान 3. 180 4. d विषयवाहु 5. b अनंत

6. b 120 7. a 90 8. a 30 9. d समकोण समद्विवाहु 10. a मी.

15. b AB,BC 16. (c) 17. (b) ABIICD 18. (c)

इकाई –4 **सूचकांक –डी.एड./बी/4**

पत्राचार पाठ्यक्रम

माध्यमिक शिक्षा मंडल म.प्र. भोपाल

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

विषय :– गणित और उसका शिक्षण **प्रश्न पत्र पंचम** **पाठ्क्रमांक – 4**

विषयांश :– बीज गणित

उपइकाई :– एक बहुपद एवं बहुपदों के घात इनके योग, घटाना गुणा एवं भाग निम्न बीजीय सूत्रों पर आधारित सरल प्रश्न :–

(i) $(x+a)(x+b)= x^2+(a+b)x+ab$

(ii) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

(iii) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

(iv) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(v) $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

(v) $(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$

उपइकाई :– दो बहुपदों का गुणनखंड विधि से LCM एवं HCF ज्ञात करना (इन पर केवल सरल प्रश्न)

उपइकाई :– तीन सरल समीकरण एवं उन पर आधारित प्रश्न

उपइकाई :– चार युगपत समीकरण एवं उन पर आधारित प्रश्नों के हल (सामान्य एवं ग्राफ विधि द्वारा)

प्रस्तावना :– हम इकाई दो व तीन में अंक गणित का अध्ययन कर चुके है। इस इकाई में हम पर एवं अचर के संयुक्त पदों से संबंधित गणित जिसे बीजगणित कहते हैं। अध्ययन करेंगे। इसके अन्तर्गत बहुपद, इसकी सक्रियाओं एवं इसके गुणनखंड ज्ञात करना हमारा उद्देश्य होगा। इसके लिये कुछ सूत्रों का ज्ञान आवयक होगा। गुणनखंड की सहायता से बहुपदों का LCM एवं HCF ज्ञात करना हमारा उद्देश्य होगा।

उपइकाई :– 1

बहुपद

आपने बीजीय व्यंजक का अध्ययन पूर्व में किया हैं। बीजीय व्यंजक के कुछ उदाहरण नीचे दिये गये हैं।

(i) $8x$

(ii) x^2+3x+1

(iii) $\sqrt{2}x^2+3x+1$

(iv) $\frac{1}{2}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$

(v) $5x^3-6x^2+3x+1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$

(vi) $3x^2+2x+5\sqrt{x}+1$

उदाहरण क्रमांक (i) से (vi) सभी बीजीय व्यंजक हैं। किन्तु उदाहरण (v) एवं (vi) में हम देखते हैं। कि चर x के घात क्रमशः 3,2,1,0,–1,–2 एवं 2,1, $\frac{1}{2}$,0 है। किन्तु (i) (ii) (iii) एवं (iv) में चर x के घात घनात्मक एवं पूर्ण संख्या है, ऐसे बीजीय व्यंजकों को बहुपद कहते हैं। अर्थात ऐसे बीजीय व्यंजक जिसके पदों के चर के घात धनात्मक एवं पूर्णांक होते हैं। बहुपद कहलाते हैं इसका सामान्य रूप

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}..........+a_n$

या $a_0{}^n+a_1x+a_2x^2+..........+a_nx^n$ है।

इसमें $a_0,a_1..........a_n$ वास्ताविक संख्या है एवं $n\geq,0$ है।

(a) बहुपद के चर के अधिकतम घात को बहुपद का घात कहते हैं।

घात के आधार पर बहुपदों का नामकरण – रैखिक बहुपद – जब चर के अधिकतम घात 1 हो जैसे $8x+1, 2y-1$ इत्यादि।

द्विघात बहुपद – जब चर के अधिकतम घात 2 हो जैसे $2x^2+x+1$

इसी प्रकार त्रिधाती, चतुर्थधाती .... बहुपद इत्यादि।

(b) **पदों के आधार पर –**

एक पदी बहुपद – जब बहुपद में पदों की संख्या 1 हो जैसे – $8x, 3x^2, ...$

द्विपदी बहुपद – जब बहुपद में पदों की संख्या 2 हो जैसे $-8x+1, 3x^2+2, ...$ इसी प्रकार तृपदी चतुर्थपदी .... बहुपद इत्यादि

4. बहुपदों का योग, घटाव – दो या अधिक बहुपदों को जोडने या घटाने में समान घात वाले पदों को एक साथ जोड या घटा पर परिणामी बहुपद प्राप्त करते हैं।

उदाहरण :–

(i) x^2+x-1 को x^3+2x^2+x+2 को जोड़िये

$$\begin{array}{l} x^2+x-1 \\ \underline{x^3+2x^2+x+2} \\ x^3+3x^2+2x+1 \end{array}$$

उदाहरण :– (ii) x^3+3x^2-4x+1 में से $2x^3+3x^2-2x-1$ को घटाइये

हल :–

$$\begin{array}{l} x^3+3x^2-4x+1 \\ 2x^3+3x^2-2x-1 \\ \underline{-\quad -\quad +\quad +} \\ -x^3-2x+2 \end{array}$$

उदाहरण :– (iiis)

$2x^2+3x-1$ में से y^2-y+3 को घटाइये

$$\begin{array}{l} 2x^2+3x-1 \\ y^2-y \qquad\qquad +3 \\ \underline{-\quad + \qquad\qquad -} \\ -y^2+y+2x^2+3x-4 \text{ उत्तर} \end{array}$$

या $(2x^2+3x-1)-(y^2-y+3)$

$= \quad 2x^2+3x-1-y^2+y-3$

$= \quad 2x^2+3x-y^2+y-4$ उत्तर

<u>बहुपदों का गुणा एवं भाग</u>

उदाहरण –1 :– $5x^2+6x+8$ को $x+1$ से गुणा कीजिए एवं गुणनफल के घात बताइये

$$\begin{array}{l} 5x^2+6x+8 \\ \underline{x+1} \\ 5x^3+6x^2+8x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad 5x^2+6x+8 \\ \hline 5x^3+11x^2+14x+8 \end{array}$$

गुणनफल का घात 3 है। उत्तर

उदाहरण :- 2

$3x^2-2x+1$ का $x+1$ से भाग दीजिए भागफल व शेषफल बताइये

$$\begin{array}{r|l} & 3x-5 \\ \hline x+1 & \cancel{3x^2}-2x+1 \\ & \cancel{3x^2}+3x \\ & - \quad - \\ \hline & \mathbf{-\cancel{5x}+1} \\ & \mathbf{-\cancel{5x}-5} \\ & + \quad + \\ \hline & \quad 6 \end{array}$$

भागफल $3x-5$ एवं शेषफल 6

पाठ्गत प्रश्नावली 4.1

1. $2x^2, 3x, -1, x^3$ को जोड़िये।
2. $P(x)=x^4-3x^2+2x+6$ और $q(x)=x^3-3x+2$ है तो $P(x)+q(x)$ एवं $P(x)-q(x)$ को ज्ञात कीजिए
3. x^3+3x^2+3x-7 और x^3-3x^2+3x+7 को जोड़िये
4. x^3-2x^2+4x+1 में से क्या घटायें कि अन्तर 1 प्राप्त हो।
5. $P(x) = x^2-3x+2$ एवं $q(x) = x^3-6x^2+x+1$ तो $P(x) \text{ X } q(x)$ ज्ञात कीजिये एवं गुणनफल का घात लिखिये।
6. $-14x^2-13x+12$ को $2x+3$ से भाग दीजिये।

उत्तर

1. x^3+2x^2+3x-1
2. $x^4-2x^3-x+8, x^4-4x^3+5x+4$
3. $2x^3+6x$
4. x^3-2x^2+4x
5. $x^5-9x^2+21x^3-14x^2-x+2$

6. भागफल -7x+4 शेषफल 0

<u>सूत्रों पर आधारित प्रश्न</u>

उदाहरण :– 1

(x+3) को (x+4) से गुणा कीजिये

हल :– सूत्र $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

$$= x^2 + (3+4)x + 3\times4$$

$$= x^2 + 7x + 12$$

उदाहरण :– 2

$(3x+2y)^2$ का विस्तार कीजिये :–

हल :– सूत्र $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2$$

$$= 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

उदाहरण :– 3

$(5x-3y)^2$ का विस्तार कीजिये।

हल :– सूत्र $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$$(5x-3y)^2 = (5x)^2 - 2(5x)(3y) + (3y)^2$$

$$= 25x^2 - 30xy + 9y^2$$

उदाहरण :– 4

$(x-3y)(x+5y)$ को हल कीजिये

हल :– सूत्र $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$$(x-5y)(x+5y) = (x)^2 - (5y)^2$$

$$= x^2 - 25y^2$$

उदाहरण :– 5

$(3x-2y)^3$ **का विस्तार कीजिये।**

हल :– सूत्र $(a-b)^3 = a - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(3x-2y)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 - (2y)^3$$

$$27x^3 - 3\times9x^2\times2y + 3\times3x\times4y^2 - 8y^3$$

$$27x^3 - 54x^2y + 36x^2y - 8y^2$$

उदाहरण :- 6

$(12)^3$ **का मान ज्ञात कीजिये।**

$(10+2)^3 = (10)^3 + 3(10)^2\times2 + 3\times10\times(2)^2 + (2)^3$

$= 1000 + 600 + 1200 + 8$

$= 2808$

उदाहरण :- 7

$x^2 - 5x + 6$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिये

हल :-

$$= x^2 - (3+2)x + 6$$
$$= x^2 - 3x - 2x + 6$$
$$= x(x-3) - 2(x-3)$$
$$= (x-3)(x-2)$$

उदाहरण :- 8

$x^2 - 4$ **का गुणनखंड कीजिये।**

हल :- सूत्र $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$= (x)^2 - (2)^2$$
$$= (x+2)(x-2)$$

उदाहरण :- 9

$x^2 - 2x + 1 - y^2$ **का गुणनखंड कीजिये**

हल :- $\therefore x^2 - 2x\times1 + (1)^2 - y^2$

$$= (x-1)^2 - (y)^2$$
$$= (x-1+y)(x-1-y)$$
$$= (x+y+1)(x-y-1)$$

उदाहरण :- 10

$25(x-y)^2 - 36(x+y)^2$ **का गुणनखंड ज्ञात कीजिये।**

हल :–

$$[5(x-y)]^2-[6(x+y)]^2$$
$$=[5(x-y)+6(x+y)][5(x-y)-6(x+y)]$$
$$=[5x-5y+6x+6y][5x-5y-6x-6y]$$
$$=[11x+y][-x-11y]$$

उदाहरण :– 11

यदि $(x+\frac{1}{x})=3$ **तो** $x^3+\frac{1}{x^3}$ **का मान ज्ञात कीजिये**

हल :–

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x.\frac{1}{x}$$
$$=(3)^3-3$$
$$=27-3$$
$$=24$$

पाठगत प्रश्न – 4.2

7. गुणनखंड ज्ञात कीजिये $121\ x^2 - 144\ y^2$

8. गुणनखंड ज्ञात कीजिये x^4-1

9. यदि x+y =5, xy= 1तो x-y का मान ज्ञात कीजिये

उत्तर

7. (11x+12y)(11x-12y),

8. (x^2+1)(x+1)(x-1)

9. 21.

उपइकाई –2

लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.)

दो या दो से अधिक बहुपदों का लघुत्तम समावर्त्य एक ऐसा छोटे से छोटा बहुपद होता है जो दिये गये बहुपद से पूर्ण रूप से विभाजित हो जाय।

क्रिया विधि :– सर्व प्रथम दिये गये बहुपदों के गुणनखंड ज्ञात करते हैं। प्रत्येक बहुपदों के गुणखंडों को गुणन के रूप में लिखते हैं। जो गुणनखंड दो या अधिक बहुपदों में उभयानिष्ठ होते हैं। उन्हें एक ही वार गुणन के रूप में लिखते हैं। यही दिये गये बहुपदों का ल.स.(L.C.M.)कहलाता है।

उदाहरण :–

x^2+7x+12, x^2 +9x+20 तथा **x^2-16** का ल.स. ज्ञात कीजिये।

हल :– $x^2+7x+12 = x^2+4x+3x+12$

$= x(x+4)+3(x+4)$

$= (x+4)(x+3)$

$x^2+9x+20 \quad = x^2+5x+4x+20$

$= x(x+5)+4(x+5)$

$= (x+5)(x+4)$

$x^2-16 \quad = (x)^2-(4)^2$

$= (x+4)(x-4)$

$\therefore L.C.M.$ ल.स. $= (x+4)(x+3)(x+5)(x-4)$

महत्तम समापवर्त्तक (H.C.F.) म. स.:–

दो या अधिक बहुपदों चा व्यंजकों का वह बड़ा से बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखंड जो दिये गये बहुपदों या व्यंजकों को पूर्ण रूप से विभाजित कर देता है। वह उसका म.स. कहलाता है।

क्रिया विधि :–

1. सर्व प्रथम दिये गये व्यंजकों का गुणनखंड ज्ञात करते हैं।
2. सभी व्यंजकों के उभयनिष्ठ गुणनखंड को उनका म.स. कहते हैं।
3. यदि एक से अधिक गुणनखंड उभयनिष्ठ है तो उनका गुणनफल दिये गये व्यंजकों का म.स. कहलाता है।
4. यदि कोई भी गुणनखंड उभयनिष्ठ न हो तो उनका म.स. 1 होता है।

उदाहरण :–

x^2-x, x^2-2x+1 तथा x^2-1 का म.स. ज्ञात कीजिये

हल :–

$x^2-x \quad = x(x-1)$

$x^2-2x+1 \quad = (x-1)^2$

$x^2-1 \quad = (x+1)(x-1)$

$\therefore$ म.स. $x-1$.

उदाहरण :–

x^2-xy , x^2-y^2 एवं x^2y-y^3 का ल. स. एवं म.स. ज्ञात कीजिये

हल :–

$x^2-xy \quad = x(x-y)$

$x^2-y^2 \quad = (x+y)(x-y)$

$$x^2y-y^3 = y(x^2-y^2)$$
$$= y(x-y)(x+y)$$

∴ अभीष्ठ ल.स. $xy\,(x-y)(x+y)$

∴ अभीष्ठ म.स. $x-y$

उदाहरण :–

x^3-y^3 , x^3+y^3 का ल.स. एवं म.स. ज्ञात कीजिये

हल :– $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

अभीष्ठ ल.स. $= (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

अभीष्ठ म.स. = 1

पाठ्गत प्रश्नावली 4.3

10. $2x^2-18$ और x^2-2x-3 का म.स. ज्ञात कीजिए
11. x^3-1 और x^4+x^2+1 का म.स. ज्ञात कीजिये
12. $(3x^2+5x-2)$ और $3x^2-7x+2$ का ल.स. ज्ञात कीजिये
13. $12(x^4-36)$ और $8(x^4+5x^2-6)$ का ल. स. ज्ञात कीजिये।

उत्तर :–

10. $x-3$
11. x^2+x+1
12. $3x-1$
13. $24\,(x^4-36)\,(x^2-1)$

उपइकाई – तीन

सरल समीकरण :– सरल समीकरण में एक अज्ञात चर होता है विद्यार्थी पूर्वज्ञान और गणितीय अनुभवों के आधार पर सरल समीकरणों के हल की विधि अपना सकते हैं। ऐसे समीकरणों को हल करने में मूल रूप से ध्यान रखने योग्य बात यह है कि सबसे पहले चर वाले पदों को समीकरण के एक ओर एवं संख्यात्मक पद (अचर) दूसरी ओर रखते हैं। पक्षान्तर में + वाले पद – एवं – वाले पद + में बदल जाते हैं। फिर गणितीय नियमों के अनुसार उनकी संक्रिया पूर्ण करते हैं। अंत में फिर चर के गुणांकों को दूसरी और नियमानुसार पक्षान्तर कर चर का मान ज्ञात कर लेते हैं।

सरल समीकरण

उदाहरण :–

$4x = 8$ तो x का मान क्या है।

हल :– $4x = 8$

$$\therefore X = \frac{8}{4}$$

$$= 2$$

उदाहरण :–

$5x+1 = 11$ तो x का मान क्या है।

हल :–

$$5x = 11-1$$

$$5x = 10$$

$$\therefore X = \frac{10}{5}$$

$$= 2$$

उदाहरण :–

दो अंकों का योग 25 है उनमें से एक संख्या 15 है तो दूसरा अंक क्या होगा।

हल :– माना कि दूसरा अंक x है।

$$\therefore 15 + x = 25$$

या $x = 25 - 15$

$$\therefore x = 10$$

उदाहरण :–

एक संख्या एवं उसके तिगुने का योग 12 है तो संख्या ज्ञात करोः–

हल :– माना कि अभीष्ठ संख्या x है

तो $x + 3x = 12$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

पाठ्गत प्रश्नावली 4.3

14. एक संख्या के दुगुने में से 30 घटाने पर हमें 56 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिये

15. $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ तो x का मान क्या है।

16. $9z-15=9-3z$ तो z का मान क्या है।

17. 100 को ऐसे दो भागों में बांटिये कि पहला भाग दूसरे का चार गुना हो दोनों भागों को ज्ञात कीजिये

18. $ax+b+cx=d$ को हल कीजिये

उत्तर :–

14. 43.

15. 6

16. 2

17. 20 और 80

18. $\frac{d-b}{a+c}$

उपइकाई – 4

युगपत समीकरण एवं उनके हल :–

उपइकाई 3 में हमने एक चर वाले समीकरण एवं उनके हल का अध्ययन कर चुके हैं। इस उपइकाई में हम दो चर वाले रेखिक समीकरण एवं उसके निकाय का हल करना सीखेंगे।

$2x+1=3$ एक चर वाले रेखिक समीकरण हैं।

$2x+3y=2$ दो चर वाले रेखिक समीकरण हैं।

एक चर वाले एक रेखिक समीकरण से चर का मान ज्ञात किया जा सकता है। किन्तु दो चर वाले एक रेखिक समीकरण से दोनों चरों के मान ज्ञात नहीं किये जा सकते हैं। इसके लिये दो रेखिक समीकरण आवश्यक हैं। अतः दो चर वाले दो रेखिक समीकरणों की सहायता से ही उन दो चरों का मान ज्ञात किया जा सकता हैं। ऐसे समीकरणों के निकाय को युगपत समीकरण के निकाय कहते हैं।

अतः ‘‘ दो चरों वाले दो रेखिक समीकरण के युग्य को युगपत समीकरण कहते हैं।

युगपत समीकरण निकाय को हल करने की निम्नलिखित विधियाँ हैंः–

1. प्रतिस्थापन विधि
2. विलोपन विधि
3. बज्रगुणन विधि
4. ग्राफीय विधि

1. प्रतिस्थापन विधि :– इस विधि में दो युगपत समीकरणों में से एक समीकरण से एक चर का मान दूसरे चर के पदों में ज्ञात कर दूसरे समीकरण में रखकर एक चर वाले समीकरण में बदल लेते हैं फिर उस चर का मान ज्ञात कर लेते हैं। इस एक चर का मान दिये गये समीकरण में रखकर दूसरे चर का मान ज्ञात कर लेते हैं।

उदाहरण :– **2x-y = 7** एवं **2x+3y = 19** को हल कीजिये

हल : – दिया गया –

2x-y = 7 ________(i)

2x+3y=19 ________(ii)

समीकरण (1) से

y = 2x-7

समीकरण (2) में का **y** मान रखने पर

2x + 3 (2x-7)= 19

या **2x + 6x - 21 = 19**

या **8x = 19 + 21**

या **8x = 40**

$\therefore x = \frac{40}{8}$

x = 5

$\therefore y = 2x - 7$ से

$= 2 \times 5 - 7$

$= 10 - 7$

$y = 3$

$$\therefore \text{हल} \left. \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 3 \end{aligned} \right\} \text{उत्तर}$$

उदाहरण :–

19. 2x-y =3

4x-y=5

Ans. x = 1

y =-1

20- 3x + 2y = 14

-x + 4y = 7

Ana. X= 3

$$y = \frac{5}{2}$$

21- $x + y = 7$

$3x - 2y = 11$

Ans. $x = 5$

$y = 2$

विलोपन विधि– इस विधि में दोनों समीकरणों में से पहले यह सोचना होता है कि दो चरों में से किस चर को पहले विलोपित करना हैं जिस चर को पहले विलोपित करना होता है। उसके गुणांकों को अदला बदली कर गुणा कर देते हैं। इसके बाद यदि उनके चिहन (+,+) हैं तो दोनों समीकरणों का घटाते हैं। और यदि एक + एवं दूसरा – है तो दोनों समीकरणों को जोड़ते हैं। जिससे एक चर वाला समीकरण प्राप्त होता है। इसको हल कर इस चर का मान एवं इसका मान किसी एक समीकरण में रख कर दूसरे चर का मान ज्ञात कर लिया जाता है।

उदा.

$$3x + 2y = 11$$
$$2x + 3y = 4$$

हल :–

$$3x + 2y = 11 \qquad -(1)$$
$$2x + 3y = 4 \qquad -(2)$$

समी. (1) को 2 से एवं समी. (2) को 3 से गुणा करते है। एवं घटाते है।

$$\begin{array}{r} 6x + 4y = 22 \\ {}_{-}6x \,{}_{-}{+}\, 9y \,{}_{-}{=}\, 12 \\ \hline \end{array}$$

$$-5y = 10$$
$$y = \frac{10}{-5}$$
$$y = -2$$

समी. (1) में y का मान रखने पर

$3x+2(-2)=11$

$\Rightarrow 3x-4=11$

$\Rightarrow 3x=11+4$

$\Rightarrow 3x=15$

$\therefore x=\frac{15}{3}$

$x=5$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore x=5\\ y=-2\end{array}\right\}$$ उत्तर

उदा.

22. $8x+5y=9$

$3x+2y=4$

$$\left\{\begin{array}{l}x=-2\\ y=5\end{array}\right.$$ उत्तर

23. $3x+2y=4$

$2x+3y=14$

$$\left\{\begin{array}{l}x=19\\ y=-8\end{array}\right.$$ उत्तर

<u>बज्र गुणन विधिः—</u>

यदि युगपत समी.

एंव $a_1x+b_1y+c_1=0$

$a_2x+b_2y+c_2=0$

है तो इनका हल

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{-y}{a_1c_2-a_2c_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$y=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

उदा. $\begin{array}{l}5x+2y+16=0\\ 7x-4y+2=0\end{array}$ को हल कीजिये

हल $\begin{array}{l}5x+2y+16=0\\ 7x-4y+2=0\end{array}$

या $$\frac{x}{(2)(2)-(-4)(16)}=\frac{-y}{(5)(2)-(7)(16)}=\frac{1}{(5)(-4)-(7)(2)}$$

या $$\frac{x}{4+64}=\frac{-y}{10-112}=\frac{1}{-20-14}$$

या $$\frac{x}{68}=\frac{y}{102}=\frac{1}{-34}$$

$$x=\frac{64}{-34}=-2$$

$$y=\frac{102}{-34}$$

$$y=-3$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-3 \end{array}\right\}$$ उत्तर

हल कीजिए

24. $x+2y=70$
$2x+y=95$

$$\left.\begin{array}{l} x=40 \\ y=15 \end{array}\right\}$$ उत्तर

25. $9x-4y-200=0$
$7x-3y-200=0$

$$\left.\begin{array}{l} x=200 \\ y=400 \end{array}\right\}$$ उत्तर

ग्राफीय विधिः– युगपत समीकरण का हल करने का ग्राफीय विधि काफी महत्वपूर्ण है क्योंकि हल का परिणाम चित्र में स्पष्ट दिखाई देता है। यदि दोनों समीकरणों द्वारा प्राप्त सरल रेखा एक बिन्दु पर कटती है तो हम कहते हैं। कि निकाय के अद्वितीय हल हैं।ऐसे समीकरण को संगत समीकरण कहते हैं। यदि दोनों सरल रेखा समानान्तर होती है तो निकाय के कोई हल नहीं हैं और इस प्रकार के समीकरण को असंगत समीकरण कहते हैं।

उदा.

$$\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ 3x+2y=9 \end{array}$$ का हल आलेखी विधि से ज्ञात कीजिये

हल दिया है $$\begin{array}{ll} 2x-y=-1 & -(1) \\ 3x+2y=9 & -(2) \end{array}$$

समी (1) से $$\begin{array}{l} y=2x+1 \\ y=f(x)=2x+1 \end{array}$$

अब x के भिन्न–भिन्न मान के संगत y का मान ज्ञात करते हैं।

x	-1	0	1
y	-1	1	3

$x=-1$ लेने पर

$y = f(-1) = 2(-1)+1 = -2+1 = -1$

$x=0$ लेने पर

$y = f(0) = 2\times 0+1 = 1$

$x=1$ लेने पर $y=f(1)=2\times 1+1=3$

इसी प्रकार

$3x+2y=9$ से

$x=-1$ लेने पर

$3(-1)+2y=9$

या $2y=12$

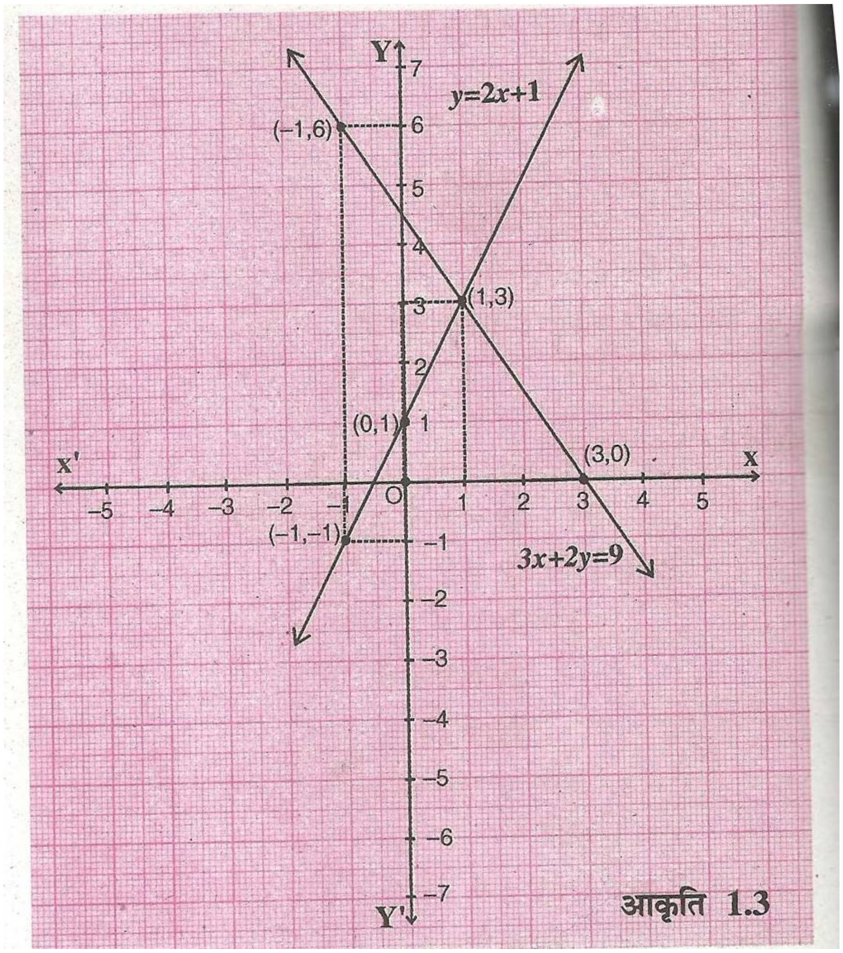
$y=6$

$x=0$ लेने पर

$3\times 0+2y=9 \Rightarrow 2y=9 \Rightarrow y=\frac{9}{2}$

$x=1$ लेने पर $3\times 1+2y=9$ या $2y=6$ या $y=3$

x	-1	0	1
y	6	9/2	3



$x=1, y=3$ दोनों समीकरणों को संतुष्ट करता है अर्थात उभयनिष्ठ है। अतः यही युगपत समीकरण निकाय का अद्वितीय हल है। अब इसका ग्राफ खीचेंगे।

अन्य उदाहरण–

26. $2x+4y=10$

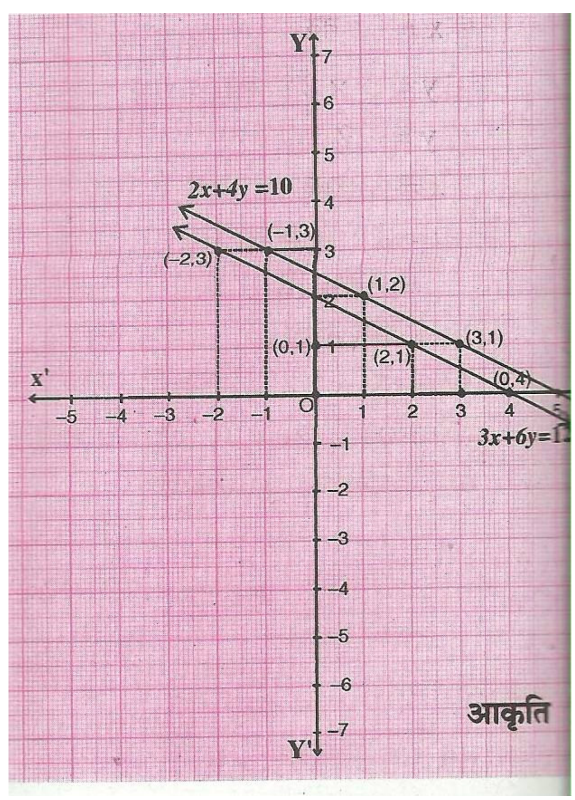
    $3x+6y=12$

27. $3x-2y=4$

    $2x+y=5$

उत्तर (2,1)

उत्तर कोई हल नहीं , समांतर रेखा मिलती है।



इकाई सारांश

1. ऐसे बीजीय व्यंजक जिसके चर के घात धनात्मक एवं पूर्णांक होते है। बहुपद कहलाते हैं।
2. बहुपद के चर के अधिकतम घात को बहुपद का घात कहते हैं।
3. बहुपद के नामकरण उनके घात एवं पदों की संख्या के आधार पर किये जाते है।
4. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
5. $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$
6. $(x+a)\,(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$
7. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^3b + 3ab^2 + b^3$

   $= a^3 + 3ab(a+b) + b^3$
8. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

   $= a^3 - 3ab\,(a-b) - b^3$
9. दो चरों वाले दो रेखीय समीकरण के युग्म को युगपत समीकरण कहते हैं।
10. युगपत समीकरण निकाय को हल करने की चार विधियाँ हैं प्रतिस्थापन विधि, विलोपन विधि बज्रगुणन विधि, ग्राफीय विधि.
11. यदि युगपत समीकरण निकाय के अद्वितीय हल हैं तो ऐसे समीकरण संगत समीकरण कहलाते हैं।
12. यदि युगपत समीकरण निकाय के कोई हल नही हैं तो ऐसे समीकरण को असंगत समीकरण कहते हैं।

आत्म परीक्षण के प्रश्न

1. यदि $p(x) = 3x^7 + 2x^4 + 7$ तो $p(x)$ के घात बताइये
2. $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \quad q(x) = x^2 - x + 4$ तो $p(x) + q(x)$ ज्ञात कीजिये
3. $x^2 - 3x + 2$ और $6x^2 + x + 1$ का गुणनफल ज्ञात कीजिये
4. $p(y) = y^2 - 2y + 1$ और $q(y) = y^3 - 3y^2 + 2y - 1$ तो $p(y) \times q(y)$ का मान ज्ञात कीजिये।
5. $2y^2+6y-7$ को $y-3$ से भाग दें तो भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिये
6. $x^2 + 7x + 12, x^2 + 9x + 20$ तथा x^2-16 का म. स. एवं ल. स. ज्ञात कीजिये
7. एक संख्या में 10 जोड़ने पर वह 26 के बराबर हो जाती है। तो वह संख्या ज्ञात कीजिये।
8. एक संख्या को इसके दो तिहाई भाग में जोडने से योग 35 आता है। संख्या बताइये।
9. समीकरण निकाय $x + y = 7, 5x + 12y = 7$ का हल प्रतिस्थापन एवं विस्थापन विधि से करें।

10. $x - y = 1, \quad 2x + y = 8$ का हल ग्राफीय विधि से कीजिये

गातिविधियां एवं नियत कार्य

1. विभिन्न प्रकार के बहुपदों की सूची बनाइये
2. गुणनखंड विधि से ल.स. एवं म.स. ज्ञात करने का अभ्यास छात्रों को करायें।
3. युगपत समीकरण निकाय के एक ही युग्म समीकरण का हल अलग–अलग विधियों से करें।

चर्चा एंव स्पष्टीकरण के बिन्दु

चर्चा के बिन्दु – यदि किसी बिन्दु पर और अधिक स्पष्टीकरण चाहते हैं। तो

स्पष्टीकरण के बिन्दु ....

पाठगत् प्रश्नों के उत्तर, प्रश्नों के साथ ही दिये गये हैं। आत्म परीक्षण प्रश्नों के उत्तर

1. 7. 2. $x^3 - 2x^3 - x + 10$ 3. $6x^4 - 17x^3 + 10x^2 - x + 2$

4. $y^5 - 5y^4 + 9y^3 - 8y^2 + 4y - 1$ 5. 29.

6- $(x+4)$, $(x+4)$ $(x+3)$ $(x+5)$ $(x-4)$ 7- 16. 8- 21.

9- $x = 11, y = -4$ 10- $x = 3, \; y = 2$

पत्राचार पाठ्यक्रम

माध्यमिक शिक्षा मडंल, म.प्र. भोपाल

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

विषय – गणित और उसका शिक्षण प्रश्न पत्र पंचम पाठ क्रमांक – 5

विषयांश

उपइकाई – एक रेखागणित के परिभाषित पद

बिन्दु, रेखा, रेखाखण्ड, समतल, प्रतिच्छेदी रेखाएं, समरेख एवं असमरेख बिन्दु, कोण की अवधारणा, कोण की माप, कोण के भाग, पूरक एवं सम्पूरक कोण, शून्य कोण, समकोण, न्यूनकोण, अधिक कोण, सरल रेखीय कोण, त्रिभुज की अवधारणा त्रिभुज का अन्तः भाग एवं बाह्यभाग, त्रिभुजों का वर्गीकरण (कोणों के आधार पर एवं भुजाओं के आधार पर)

समांतर रेखाओं की धारणा, संगत कोण, एकान्तर कोण अन्तः कोण, समांतर रेखाओं संबंधी प्रमेय, गुनिया द्वारा समांतर रेखाएं खीचना।

रेखा गणितीय उपकरण एवं उनके उपयोग द्वारा वृत्त की रचना

सममिति, सममिति केन्द्र, त्रिभुज, आयत, वृत्त, चतुर्भुजों आदि की सममिति, सममिति अक्ष, दो आकृतियों में सममिति (कागज को मोड़कर सममिति आकार बनाना)

उपइकाई – दो

त्रिभुज के अन्तः कोणों का योग एवं बहिषकोण संबंधी प्रमेय

त्रिभुज की सर्वोगसमता, समरूपता एवं समता संबंधी प्रमेय

त्रिभुज की सर्वांगसमता, दिये गये त्रिभुज के सर्वांगसम त्रिभुजों की रचना, सर्वागंसमता की शर्ते, त्रिभुज की सर्वागसमताओं संबंधी प्रमेय, समद्विबाहु त्रिभुज प्रमेय , त्रिभुजों की असमान भुजा संबंधी प्रमेय त्रिभुजों के कोणों एवं भुजाओं में संबंध) पर आधारीय प्रमेय, पाइथागोरस प्रमेय एवं उनके अनुप्रयोग, त्रिभुज की रचना जबकि निम्नलिखित अवयव दिये गये है। दो भुजाएं एवं उनके बीच का कोण, एक भुजा व दो कोण, तीन भुजाएं, समकोण का कर्ण एवं एक भुजा अथवा एक न्यून कोण, चतुर्भुज की धारणा चतुर्भुज के अन्तः एवं बाह कोण, चतुर्भुज का अन्तः एवं बाह भाग, चतुर्भुजों का वर्गीकरण, विषम चतुर्भुज, समचतुर्भुज, समलंब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज के गुण एवं उनपर आधारित प्रमेय, आयत, वर्ग पतंगाकार चतुर्भुज, चतुर्भुज में समरूपता एवं समता की धारणा। समांतर चतुर्भुज संबंधी प्रमेय आयत,

समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफत्र संबंधी प्रमेय, चतुर्भुज की रचना जबकि निम्नलिखित अवयन दिये हों, चारों भुजाऐं एवं एक कोण, तीन भुजाऐं एवं दी गई एक भुजा के दो कोण, चारो भुजाऐं एवं एक कर्ण, समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाऐं एवं उनके अन्तर्गत कोण, विभिन्न रेखागणितीय आकृतियों में समरूपता का बोध, त्रिभुज की समरूपता की शर्ते ।

उपइकाई – तीन

वृत्त की धारणा, केन्द्र, त्रिज्या व्यास, चाप, चापकर्ण, वृत्त की आंतरिक एवं बाह भाग, वृत्तीय एवं अर्धवृत्तीय कोण, वृत्त खंड एवं त्रिज्या खंड, वृतार्ध का कोण, किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरिक कोण, त्रिभुज के परिगत, बहिर्गत एवं अन्तर्गत वृत्त की रचना, वृत्त की परिधि पर किसी बिन्दु पर तथा बाहरी भाग में स्थित किसी बिन्दु पर स्पर्थ रेखा खीचना

इकाई सारांश

आत्म परीक्षण के प्रश्न गतिविधियों एवं नियतकार्य चर्चा व स्पष्टीकरण के बिन्दु

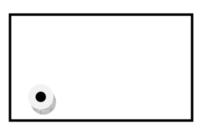
पाठगत प्रश्नों के उत्तर

प्रस्तावना– ज्यामिति का हमारे जीवन में काफी महत्व है। इसके अन्तर्गत हम विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों एवं उनमें संबंध का अध्ययन करते हैं। हमारे प्राचीन ग्रंथों शुल्ब शास्त्र में वेदियों की आकृति आदि का वर्णन है। ब्रम्हगुप्त, भास्कराचार्य, आर्यभट्ट, महावीराचार्य आदि गणितज्ञों का रेखागणित, अंकगणित, बीजगणित में काफी योगदान रहा है। इनके योगदान को देखते हुए यह कहना अतिस्योक्ति नहीं होगी कि ज्यामितिय गणित भारत की देन है।

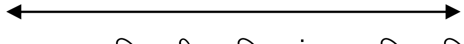
इकाई– एक

1. रेखा गणित के परिभाषित पद –

बिन्दु – बिन्दु एक काल्पनिक धारणा है, पेंसिल की बारीक नोंक से कागज पर लगाया गया निशान बिन्दु है। परिभाषा के रूप में हम कह सकते हैं कि बिन्दु वह है जिसकी कोई लंबाई चोड़ाई या मोटाई न हो।

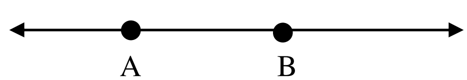


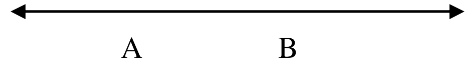
रेखा – रेखा वह है जिसकी केवल लंबाई हो चौड़ाई या मोटाई न हो और जो दोनों और अनन्त दूरी पर बढ़ाई गई हो इसे प्रायः ℓ द्वारा प्रदर्शित करते हैं।



रेखाखण्ड– रेखा का वह भाग जिसकी आदि एवं अन्त बिन्दु निश्चित हो

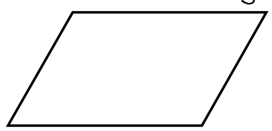
AB रेखा ℓ का रेखाखण्ड है।



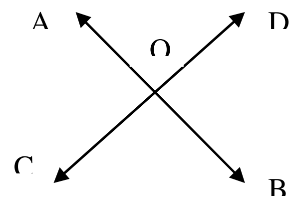


किरण– एक रेखाखण्ड $\overline{AB}$ को जब केवल एक ही दिशा में अनन्त तक बढ़ायी जाती है। तो इसे किरण AB या $\overrightarrow{AB}$ कहते हैं।

समतल – समतल वह है जिसकी लंबाई व चौड़ाई हो किन्तु मोटाई न हो या समतल वह सतह है जिस पर स्थित किसी भी दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा इसी सतह पर स्थित हो।

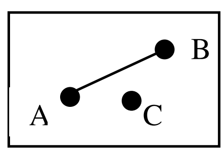


<u>प्रतिच्छेदी रेखायें –</u> एक ही समतल में स्थित दो रेखायें जो परस्पर समांतर न हो उसे प्रतिच्छेदी रेखा कहते हैं। ये रेखा एक और केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं। या वे दो रेखाएं जिसके केवल एक उभ्यनिष्ठ बिन्दु हो उसे प्रतिच्छेदी रेखाएं कहते हैं।



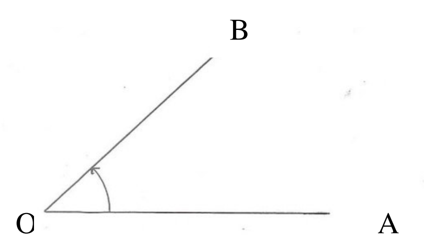
<u>समरेख बिन्दु –</u> एक सरल रेखा पर स्थित समस्त बिन्दु को समरेख बिन्दु कहते हैं।

<u>असमरेख बिन्दु –</u> समतल में स्थित तीन बिन्दु यदि एक सरल रेखा पर नहीं है तो वे असमरेख बिन्दु कहलाते हैं।



<u>कोण –</u> यदि दो किरण $\overrightarrow{OA}$ एवं $\overrightarrow{OB}$ के एक उभयनिष्ठ बिन्दु O हो तो वे कोण AOB बनाते है इसे $\angle AOB$ से दर्शाते हैं।

<u>कोणों की माप –</u> $\overrightarrow{OA}$ से $\overrightarrow{OB}$ तक घूमने में जो कोण बनता है। उसकी माप की $\angle AOB$ माप कहलाती है। इसे $m\angle AOB$ से भी दर्शाया जाता है।

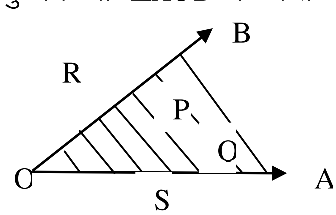


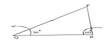
<u>कोण के भाग–</u> कोण के दो भाग होते है। $\angle AOB$ के

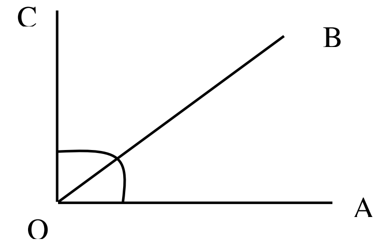
<u>अन्तः भाग –</u> $\angle AOB$ के समतल में OA से B तक व OB से A तक स्थित समस्त बिन्दुओं के समुच्चय को $\angle AOB$ का अन्तः भाग कहते हैं। चित्र में बिन्दु P, Q अन्तः भाग में स्थित है।

<u>बाह्य भाग –</u> $\angle AOB$ के समतल में स्थित उन सभी बिन्दुओं के समुच्चय जो $\angle AOB$ के अन्तः भाग में नहीं है। $\angle AOB$ का बाह्य भाग कहलाता है।

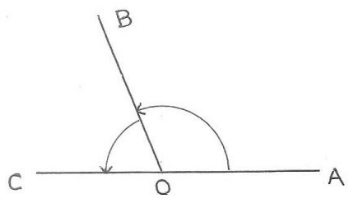
त्रिभुज में बिन्दु R, S बाह्य भाग में स्थित है।



पूरक कोण – दो कोण परस्पर पूरक कोण कहलाते हैं यदि उन दोनों कोणों के योग की माप 90^0 है। चित्र में $\angle AOB + \angle BOC = 90^0$ इसलिये $\angle AOB$ एवं  परस्पर पूरक कोण है। 35^0 एवं 55^0 परस्पर पूरक कोण है। इसे कोडि पूरक कोण भी कहते है।

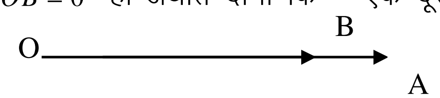


सम्पूरक कोण – दो कोण परस्पर सम्पूरक कोण कहलाते हैं। यदि उन दोनों कोणों के योग की माप 180^0 है। चित्र में $\angle AOB + \angle BOC = 180^0$ इसलिये $\angle AOB$ एवं $\angle BOC$ परस्पर सम्पूरक कोण हैं।



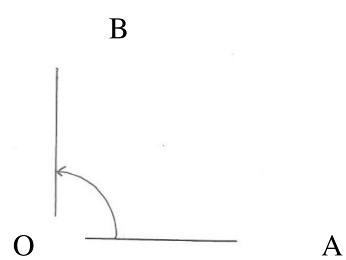
120^0 एवं 60^0 परस्पर सम्पूरक कोण हैं।

शून्य कोण – यदि दो किरण $\overline{OA}$ एवं $\overline{OB}$ जिसके एक बिन्दु O उभयनिष्ठ हो और दोनों के बीच बने कोण की माप $\angle AOB = 0^0$ हो अर्थात दोनों किरण एक दूसरे पर हो या पूरा–पूरा ढंक लेती है।



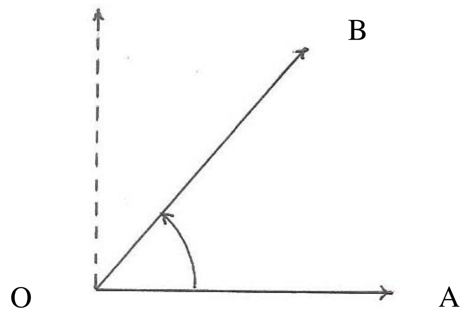
समकोण – जब दो किरण एक दूसरे पर इस प्रकार आधारित हों कि उनके बीच बने कोण की माप 90^0 हो तो इसे समकोण कहते हैं।

चित्र में $\angle AOB = 90^0$ अर्थात $\angle AOB$ समकोण है।

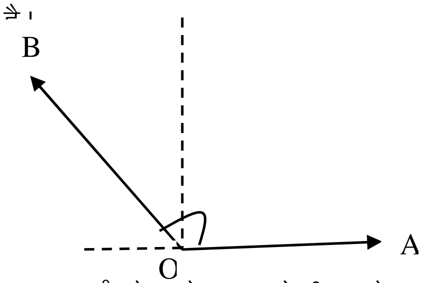


न्यूनकोण – जब दो किरण एक दूसरे पर इस प्रकार आधारित हों कि उनके बीच बने कोण की माप 90^0 से O तो इस प्रकार बने कोण को न्यूनको A हैं।

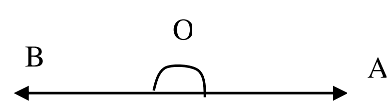
चित्र में $\angle AOB = 90^0$ से कम है अतः $\angle AOB$ न्यूनकोण है।



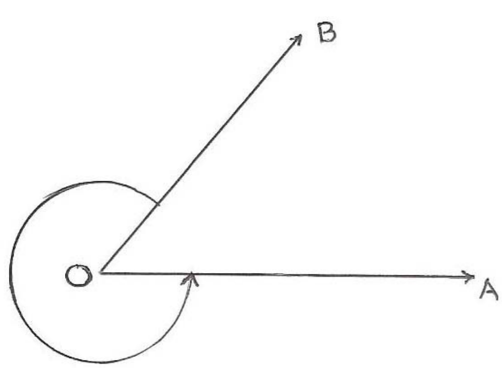
अधिक कोण – जब दो किरण एक दूसरे पर इस प्रकार आधारित हों कि उनके बीच बने कोण की माप 180^0 से कम हो तो इस प्रकार बने कोण को अधिक कोण कहते हैं। चित्र में $\angle AOB = 180^0$ से अधिक है अतः $\angle AOB$ अधिक कोण है।



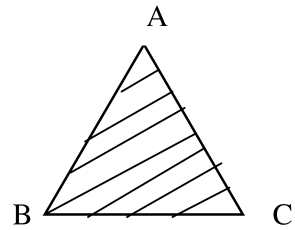
सरल रेखीय कोण – वह कोण जिसका मान 180^0 हो उसे सरल रेखीय कोण कहते है।
$\angle AOB = 180^0$ अतः $\angle AOB$ सरल रेखीय कोण हैं।



वृहत कोण – वह कोण जिसका मान 180^0 से अधिक किन्तु 360^0 से कम हो उसे वृहत कोण कहते हैं।



<u>2.त्रिभुजों की अवधारणा –</u> तीन रेखाखंडों से घिरा समतल आकृति त्रिभुज कहलाता है। इसे Δ से दर्शाया जाता है। एक त्रिभुज में –



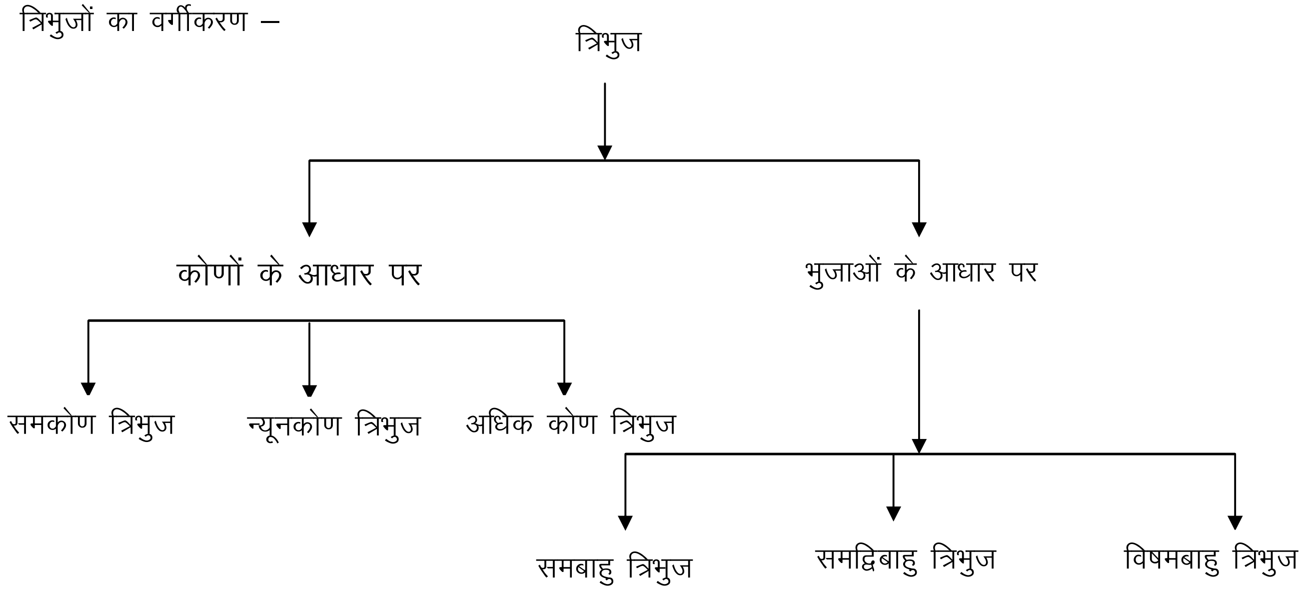
(i) तीन शीर्ष बिन्दु होते हैं A, B, C इनके शीर्ष हैं।

(ii) तीन भुजा होते हैं AB, BC, CA इनके भुजा हैं।

(iii) तीन कोण होते हैं $\angle A, \angle B, \angle C$ इनके कोण हैं।

<u>त्रिभुज का अन्तः भाग</u> – त्रिभुज की तीनों भुजाओं के घिरे क्षेत्र के भीतर का भाग अन्तः भाग एवं बाहर के भाग को बाह्य भाग कहते हैं। छायांकित भाग त्रिभुज का अन्तः भाग एवं तल का शेष भाग बाह्य भाग कहलाता है।

त्रिभुजों का वर्गीकरण –



<u>समकोण त्रिभुज–</u> ऐसे त्रिभुज जिसके एक कोण की माप 90^0 हो उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं।

न्यूनकोण त्रिभुज – ऐसे त्रिभुज जिसके प्रत्येक कोणों की माप 0^0 एवं 90^0 के बीच हो उसे न्यूनकोण त्रिभुज कहते हैं।

<u>अधिक कोण त्रिभुज</u> – ऐसे त्रिभुज जिसके एक कोण की माप 90^0 एवं 180^0 के बीच हो उसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं।

<u>समबाहु त्रिभुज –</u> ऐसे त्रिभुज जिसके तीनों भुजाओं की माप बराबर हो, समबाहु त्रिभुज कहते हैं।

<u>समद्विबाहु त्रिभुज –</u> ऐसे त्रिभुज जिसकी दो भुजा की लंबाई समान हो उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।

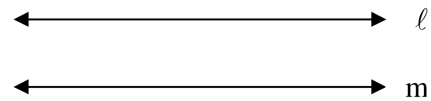
<u>विषमबाहु त्रिभुज –</u> ऐसे त्रिभुज जिसके तीनों भुजा की लंबाई भिन्न–भिन्न माप की हो तो विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं।

<u>विशेष त्रिभुज –</u> समकोण समद्विबाहु त्रिभुज– ऐसे त्रिभुज जिसकी दो भुजा की लंबाई समान हों तथा इन दोनों समान भुजा से बनने वाले कोण की माप 90^0 हो उसे समकोण समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।

3.समांतर रेखाओं की धारणा – यदि एक ही समतल में स्थित दो रेखा, जिसे दोनों और अनन्त दूरी तक बढ़ायी गयी हो और वे एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती है, समांतर रेखाएं कहलाती है।

यदि ℓ एवं m दो रेखा हो और अनंत दूरी तक बढ़ाने पर वे एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती है।

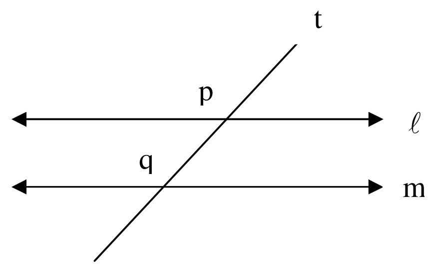
तो ℓ समांतर m के है।



सांकेतिक रूप में इसे $\ell || m$ लिखते हैं।

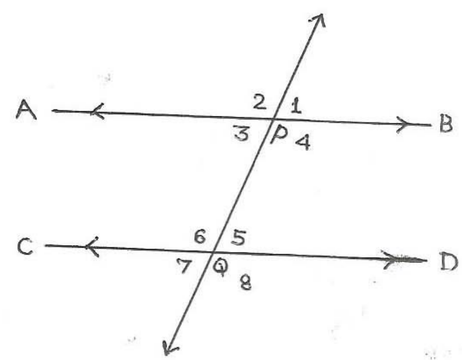
तिर्यक छेदी रेखा – एक सरल रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को अलग–अलग बिन्दु पर काटती (प्रतिच्छेद) है तो इसे तिर्यक छेदी रेखा कहते हैं।

सरल रेखा t रेखा ℓ एवं m को अलग–अलग बिन्दु P एवं Q पर काटती है अतः सरल रेखा t तिर्यक छेदी रेखा है।



तिर्यक छेदी रेखा द्वारा दो रेखाओं को काटने (प्रतिच्छेद) पर बने कोण –

यदि AB एवं CD दो रेखा है t कोई तिर्यक छेदी रेखा है जो AB एवं CD को क्रमशः P एवं Q पर प्रतिच्छेद करती है। तो



(i) ⊿ एवं $\angle 5$

$\angle 2$ एवं $\angle 6$

$\angle 3$ एवं $\angle 7$

$\angle 4$ एवं $\angle 8$

संगत कोण के जोड़े हैं।

(ii) $\angle 3$ एवं $\angle 5$

$\angle 4$ एवं $\angle 6$

एकांतर अंतः कोण के जोड़े हैं।

(iii) $\angle 1$ एवं $\angle 3$

$\angle 2$ एवं $\angle 4$

$\angle 5$ एवं $\angle 7$

$\angle 6$ एवं $\angle 8$

शीर्षाभिमुख कोण के जोड़े हैं।

(iv) $\angle 4$ एवं $\angle 5$

$\angle 3$ एवं $\angle 6$

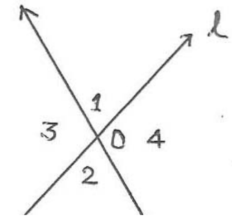
अन्तः कोणों के जोड़े हैं।

शीर्षाभिमुख कोण अभिगृहीत

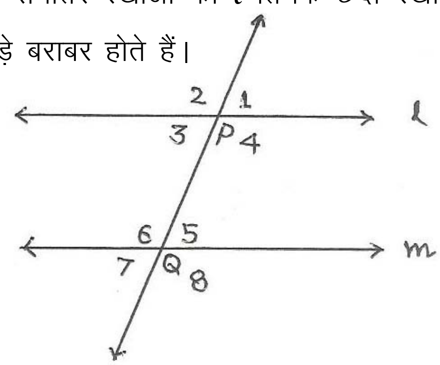
यदि दो रेखा ℓ एवं m बिन्दु o पर एक दूसरे को काटती है तो शीर्षाभिमुख कोण

$\angle 1 = \angle 2$

एवं $\angle 3 = \angle 4$



संगत–कोण–अभिगृहीत – यदि ℓ एवं m दो समांतर रेखाओं को t तिर्यक छेदी रेखा क्रमशः p एवं Q पर प्रतिच्छेद करती है तो संगत कोणों के जोड़े बराबर होते हैं।



$\angle 1 = \angle 5$

$\angle 2 = \angle 6$

$\angle 4 = \angle 8$

$\angle 3 = \angle 7$

एकान्तर कोण अभिगृहीत– उपरोक्त चित्र से – एकान्तर कोणों के जोड़े बराबर होते हैं।

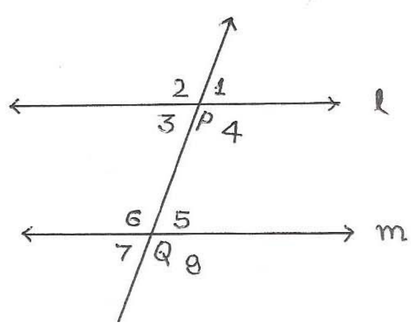
एकातर $\angle 3 = \angle 5$

$\angle 4 = \angle 7$

अन्तः कोण अभिगृहित – यदि रेखा ℓ एवं m समांतर है एवं तिर्यक छेदी रेखा t इन्हें क्रमशः p एवं Q पर काटती है तो समानान्तर रेखाओं के एक ही ओर के अन्तः कोणों का योग

एवं $\angle 4 + \angle 5 = 180^0$

$\angle 3 + \angle 6 = 180^0$



अतः यदि एक तिर्यक छेदी रेखा किसी दो समांतर रेखाओं को काटती है तो समांतर रेखाओं के एक ही ओर के अन्तः कोणों का योग सम्पूरक होते हैं विलोमनः यदि एक रेखा किसी दो रेखा को इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि एक ही ओर के अन्तः कोणों का योग सम्पूरक हो तो वे दोनों रेखा समांतर होगी।

<u>समांतर रेखाओं संबंधी प्रमेय –</u>

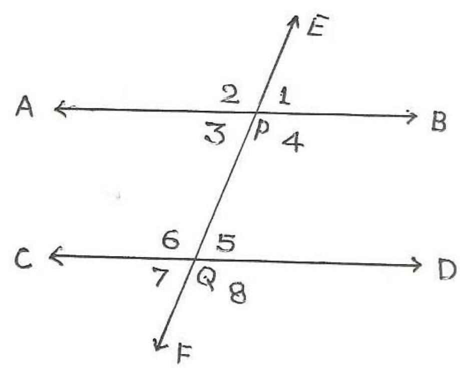
1. यदि दो समांतर रेखाओं को तीसरी तिर्यक रेखा काटती है तो संगत कोण बराबर होते हैं।

   दिया है – AB तथा CD दो समांतर रेखाएं है जिसे तीसरी रेखा EF क्रमशः p एवं Q पर काटती है।

   सिद्ध करना है कि संगत कोणों के जोडे $\angle 2 = \angle 6$
   $\angle 1 = \angle 5$

उपपति – रेखा EF रेखा AB को p पर काटती है शीर्षाभिमुख कोण $\angle 1 = \angle 4$

$\angle 4 = \angle 5$ एकान्तर कोण हैं।
$\angle 1 = \angle 5$



इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\angle 2 = \angle 6$

<u>गुनिया (सेटस्क्वायर) द्वारा समांतर रेखा खींचना –</u> कम्पास बॉक्स में प्लास्टिक के दो त्रिभुजाकार आकृति होती है। इसे ही गुनिया कहते हैं। इस गुनिया का उपयोग किसी रेखा के एक बिन्दु पर बिना परकार की सहायता से लंब खीचने में और समांतर रेखा खींचने में किया जाता है। प्रयोगशाला में इससे और भी कई काम आसानी से किये जा सकते हैं। समांतर रेखा खीचने में इस दोनों आकृतियों की सबसे लंबी भुजा को आमने–सामने इस प्रकार रखते हैं कि इसका आकार आयत जैसा बन जाय जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

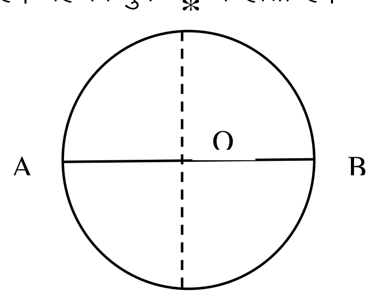
चित्र में ABC एवं DEF दो गुनिया को इस प्रकार रख कर दिखाया गया है कि इनकी सबसे बड़ी भुजा AC एवं DF पास–पास हो और इससे बनी आकृति आयताकार है। अब इसकी भुजा AB एवं

DE से रेखा खींचकर $AB // DE$ रेखा खीची जा सकती है इसी प्रकार BC एवं EF से रेखा खीचंकर $BC // EF$ रेखा खींची जा सकती है।

<u>रेखागणितीय उपकरण एवं उनके उपयोग द्वारा वृत की रचना–</u> ज्यामिति के अध्ययन में रेखागणितीय उपकरण जैसे–पेन्सिल, रबड, फुटा, चांदा, सेटस्क्वायर, परकार, पेन्सिल आदि प्रमुख है। जिसकी सहायता से प्रत्येक ज्यामितीय आकृति बनाई जा सकती है।

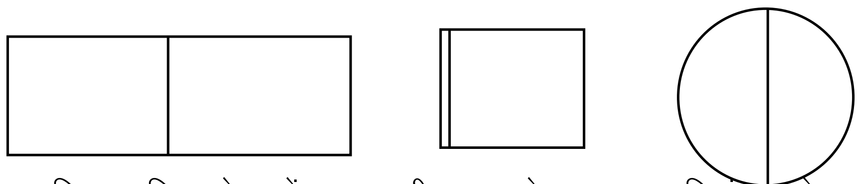
उपकरण	उपयोग
पेन्सिल	ज्यामिति आकार बनाने में
रबर	अनावश्यक चिन्ह या आकार मिटाने में
चांदा	अलग–अलग मान के कोण बनाने में
सेटस्क्वायर (गुनिया)	समांतर रेखा खीचने में ,लबवत रेखा खींचने में
फुटा	सरल रेखा खीचने में
परकार	वृत खींचने में, किसी कोण या रेखा को समद्विभाग करने में

<u>रेखागणितीय उपकरण द्वारा वृत की रचना –</u> वृत की रचना करने के लिये हमें रेखागणितीय उपकरणों की आवश्यकता होती है। मान लिया कि हमें 2 सेंमी. की त्रिज्या का वृत खीचना है तो सर्वप्रथम ब्यास = 2x त्रिज्या = 2x2=4 सेंमी की रेखा AB खीचते है। अब इस रेखा को दो बराबर भागों में बांटकर मध्य बिन्दु 0 निकाल लेते हैं। इस बिन्दु 0 को केन्द्र एवं OA=OB को त्रिज्या मानकर परकार की सहायता से बिन्दु पथ खीचते हैं। यह बिन्दुप* ा होता है।



<u>सममिति –</u> सममिति से तात्पर्य है सम+मिति। सम य.. * -राबर, समान एवं मिति से अर्थ है माप। अर्थात् ऐसी दो आकृति जिसकी माप बराबर हो।

जैसे – एक चौकोर कागज का टुकड़ा लें उसे बीचोबीच उसकी लंबाई या चौड़ाई के अनुदिश मोडें तो वह दो सममित यानि एक समान आकृति बना लेता है। पुस्तक के कोई दो पेज खोलते हैं तो वह भी सममित है उस रेखा के, जिससे वह जुड़ा है। एक वृत्ताकार कागज काट लें उसे ब्यास रेखा से मोड दें तो वह दो समान भागों में बंट जाएगा। ये दोनों भाग व्यास रेखा के आधार पर सममित होता है। अतः ऐसी रेखागणितीय आकृतियां जो किसी रेखा या बिन्दु के दोनों ओर समान रूप से बनी है सममिति आकृतियां कहलाती हैं।

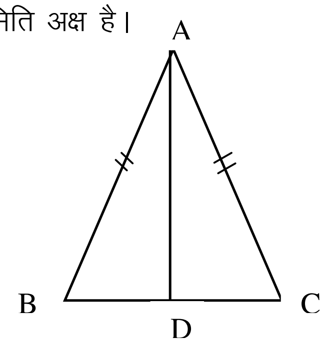


सममिति केन्द्र – यदि एक बिन्दु के चारों तरफ सभी प्रकार से समान आकृतियां हो तो वह सममिति केन्द्र कहलाता है। उदाहरण – वृत का केन्द्र सममिति केन्द्र होता है।

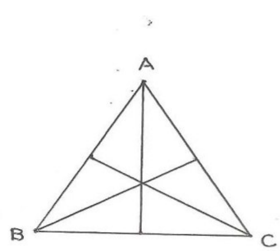
सममिति अक्ष – सममिति आकृतियों को जिस रेखा द्वारा दो सर्वागंसम आकृतियों में विभाजित कर सकते हैं उसे सममिति अक्ष कहते हैं।

जैसे – जब कोई व्यक्ति दर्पण के सामने खड़ा होता है तो उसका सममित प्रतिबिम्व दर्पण में बनना है व्यक्ति एवं प्रतिबिम्ब का सममिति अक्ष दर्पण होता है।

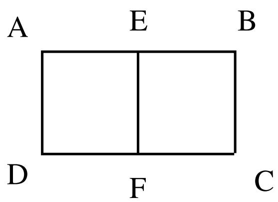
त्रिभुज – समद्विबाहु ΔABC में $\Delta ABD, \Delta ACD$ के सममित है क्योंकि AD के सापेक्ष यदि ABD को ACD पर रखा जाय तो B बिन्दु C को पूरा–पूरा ढक लेगा यहाँ AD सममिति अक्ष है।

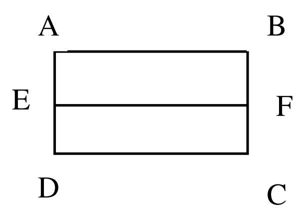


समकोण त्रिभुज सममित नहीं होता है। समबाहु त्रिभुज उसके शीर्ष एवं एक भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा के सममित होता है।

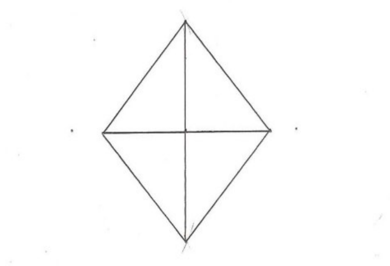


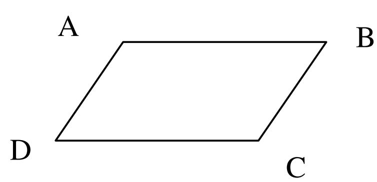
<u>आयत –</u> आयत उसकी लंबाई के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा के सममित होता है। इसमें मध्यबिन्दु को मिलाने वाली रेखा EF सममित अक्ष कहलाता है। इसी प्रकार आयत, उसकी चौड़ाई के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा के सममित होता है। यह रेखा सममित अक्ष कहलाता है।

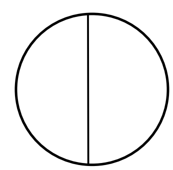




वृत्त–वृत्त अपने व्यास के सममित होता है। वृत्त का व्यास सममित अक्ष कहलाता है।
चतुर्भुज – समांतर चतुर्भुज सममित आकृति नहीं बनाता है।
समचतुर्भुज – समचतुर्भुज अपने विकर्ण के सममित होता है। विकर्ण सममित अक्ष कहलाता है।







<u>दो आकृतियों में सममिति –</u> एक पेपर सीट लें इसे दो भागो में मोड लें अब एक धागे को स्याही में डुबाकर गीला कर लें एवं कागज के दोनों भागों के बीच धागा रखकर कागज को हल्के दबाकर धागे को धीरे–धीरे खीच लें। अब कागज को फैलाकर देखेंगे तो आपको एक समान आकृति दोनों पन्नों पर दिखाई देगा। ये आकृतियां सममित आकृतियां हैं।

सममिति आकृतियों की विशेषताएं –

1. दोनों आकृतियां सर्वांगसम हों।
2. आकृतियों का रूपान्तरण हो सके अर्थात् दायां भाग बांया तथा बांया भाग दाया बन सके।
3. सममिति केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा का सममित अक्ष लंबअर्द्धक हो।
4. आकृतियों की संगत भुजाएं एक अक्ष से बराबर कोण बनाती हो।
5. आकृतियों की संगत भुजाएं बढ़ाने पर एक बिन्दु पर आकर मिले।

<u>पाठगत प्रश्न–</u>

रिक्त स्थानों को भरों :–

1. वह कोण जिसका मान 180^0 और 360^0 के बीच होता है .... कहलाता है।

2. विषमबाहु त्रिभुज की तीनों भुजाएं............ होती है।

3. सरल रेखीय कोण का मान .... होता है।

4. निम्न में से किस आकृति में सममिति गुण नहीं है।

(a)आयात (b)वर्ग (c)समबाहु त्रिभुज (d). विषमबाहु त्रिभुज

5. वृत्त में कितनी सममित रेखाएं होगी–

(a) 8 (b) अनन्त (c) 4 (d) 6

6. 60^0 का सम्पूरक कोण होता है

(a) 30^0 (b)120^0 (c)90^0 (d)180^0

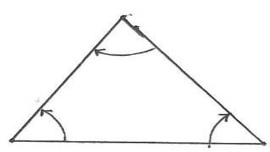
7. कोटिपूरक कोणों का योग का मान होता है।

(a) 90^0 (b)90^0 से बड़ा (c) 90^0 से छोटा (d) 180^0

उपइकाई – दो

त्रिभुज के अन्तः कोणों का योग एवं बहिष्कोण संबंधी प्रमेय –

त्रिभुज के अन्तः कोण –



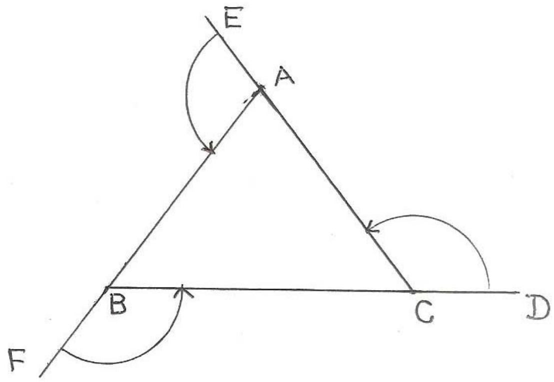
त्रिभुज ABC में –

$\angle CAB, \angle ABC, \angle ACB$ अन्तः कोण कहलाते हैं।

किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 (सम्पूरक) होते हैं।

बहिषकोण – किसी त्रिभुज की भुजा को बढ़ाने पर इसके तथा त्रिभुज की भुजा के साथ जो कोण बनता है। उसे बहिषकोण कहते हैं। चित्र में

$\angle ACD, \angle BAE, \angle FBC$ बहिषकोण है।

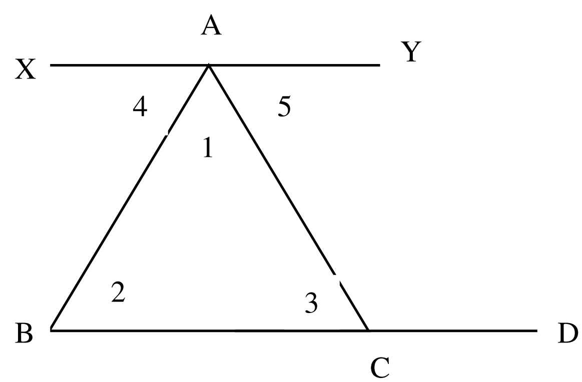


त्रिभुज के तीनों बहिषकोणों का योग 4 समकोण होता है।

प्रमेय – त्रिभुज में तीनों अन्तः कोणों का योग 180^0 होता है।

दिया है – ABC एक त्रिभुज है। तो सिद्ध करना है कि $-\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^0$

रचना – A से $BC // XY$ खींचा



उपपति – $XA // BC$ एवं AB उन्हें काटती है।

एकांतर $\angle ACD + \angle 1 + \angle 2$

इसी प्रकार एकांतर कोण $\angle 4 = \angle 3$

$\angle 4, \angle 1, \angle 5$ सरल रेखीय कोण हैं।

$\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180^0$

$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180$

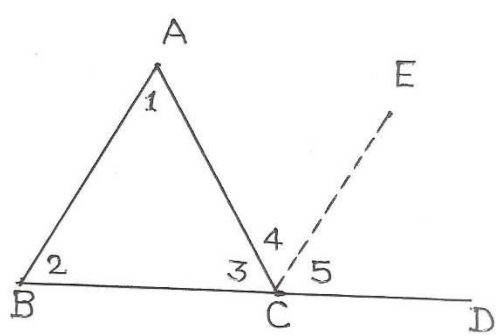
इति सिद्धम

प्रमेय – किसी त्रिभुज का बहिषकोण सुदूर अन्तः कोणों के योग के बराबर होता है।

दिया है – ABC एक Δ है BC को D तक बढ़ाई गई है।

सिद्ध करना है कि – बहिषकोण

$\angle 4 = \angle 2$



रचना – $AB // CE$ खींचा

उपपति – $AB // CE$ एवं AC उनसे मिलती है।

$\therefore \angle 1 = \angle 4$ एकान्तर कोण है।

$\angle 2 = \angle 5$ संगत कोण है।

$\angle 4 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 2$, अतः बहिषकोण $\angle ACD =$ सुदूर अन्तः कोणों का योग है।

2. **त्रिभुजों की सर्वांगसमता –** सर्वांगसमता से तात्पर्य ''सब प्रकार से बराबर'' दो त्रिभुजों के सब प्रकार से बराबर होने के लिये आवश्यक है कि एक त्रिभुज को उठाकर यदि दूसरे त्रिभुज पर रखा जाय तो वह एक दूसरे को पूरा–पूरा ढक ले। अर्थात एक त्रिभुज के तीनों शीर्ष दूसरे त्रिभुज के संगत शीर्ष एवं एक त्रिभुज की तीनों भुजा दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं पर रखी जा सके।

सर्वांगसमता की शर्तें –कोई भी दो त्रिभुज निम्नलिखित स्थितियों में सर्वागंसम होते हैं।

1. एक त्रिभुज की तीनों भुजाएं दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के अलग–अलग बराबर हों।
2. एक त्रिभुज के दो कोण तथा उनके बीच की भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और उनके बीच की संगत भुजा के अलग–अलग बराबर हों।
3. एक त्रिभुज की दो भुजा और उनके बीच के कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके बीच के कोण केअलग–अलग बराबर हों।
4. एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और संगत भुजा के अलग–अलग बराबर हों।

3. **समरूपता –** समरूपता से तात्पर्य समान स्वरूप, आकार से है। प्रायः बच्चा अपने माता–पिता का ही समरूप होता है। यहां हम ज्यामितीय आकारों की समरूपता की चर्चा करेंगे–

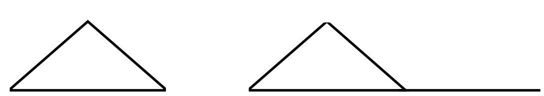
वृत्त चाहे उसकी त्रिज्या कुछ भी लिया जाय सभी आपस में समरूप होंगे। वर्ग, समबहुभुज सदैव समरूप होते हैं। चाहे उसकी भुजा किसी भी लंबाई के लिये जायें। त्रिभुज, आयत, समांतर चतुर्भुज कुछ शर्तो के अधीन समरूप होते हैं। दो आकृतियों के समरूप होने के लिये –

1. संगत कोण सर्वोगसम हों
2. संगत भुजाओं का अनुपात बराबर होना चाहिये।

4.**त्रिभुज की सर्वांगसकता –** इसका वर्णन 2 में किया जा चुका है।

दिये गये त्रिभुज के सर्वांगसम त्रिभुजों की रचना – दिया है त्रिभुज ABC । अब ΔABC के सर्वांगसम त्रिभुज DEF की रचना करना है।

रचना – सर्वप्रथम एक सरल रेखा EG खींचते है अब E से $BC = EF$ काटा, अब E को केन्द्र मानकर AB के बराबर चाप काटा इसी प्रकार F को केन्द्र मानकर AC के बराबर एक चाप इस



प्रकार काटा कि दोनों चाप एक दूसरे से D पर कटती है। अब DE एवं DF को मिला दिया यही अभीष्ट सर्वांगसम त्रिभुज DEF है।

संकेत रूप में $ABC \cong \Delta DEF$

त्रिभुज की सर्वांगसमता संबंधी प्रमेय

1. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजा दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के अलग–अलग बराबर हों तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इस भुजा–भुजा–भुजा प्रमेय या SSS प्रमेय भी कहते हैं।
2. यदि एक त्रिभुज की दो भुजा एवं उनसे बनने वाले कोण दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजा एवं उनके बीच के कोण के बराबर हों तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे भुजा–कोण–भुजा (SAS) प्रमेय भी कहते हैं।
3. यदि किसी त्रिभुज के दो कोण एवं उनके बीच की भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोण एवं उनके बीच की भुजा के अलग–अलग बराबर हों तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे। इसे कोण–भुजा–कोण (ASA) प्रमेय भी कहते हैं।
4. एक समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं समकोण बनाने वाली एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण एवं समकोण बनाने वाली संगत भुजा के बराबर हों तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे इस समकोण–कर्ण–भुजा प्रमेय (RHS) भी कहते हैं।

समद्विबाहु त्रिभुज संबंधी प्रमेय –

समद्विबाहु त्रिभुज के आधार पर के कोण बराबर होते हैं।

दिया है –

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। जिसकी भुजा $AB = AC$

सिद्ध करना है कि $\angle ABC = \angle ACB$

रचना– शीर्ष बिन्दु A से आधार BC पर AD लंब डाला

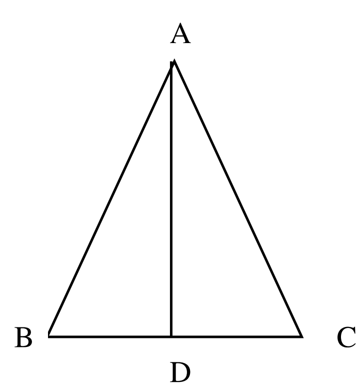
उपपति – समकोण ΔADB एवं ADC में

$\angle ADB = \angle ADC$

$AB = AD$

$AD = AD$

समकोण–कर्ण–भुजा अभिगृहीत से –



$\Delta ADB \cong \Delta ADC$

$BD = CD$

$\angle ABC = \angle ACB$

इसी प्रकार बिन्दु सिद्ध कर सकते है कि समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष से आधार पर डाला गया लंब आधार को समद्वि भाग करता है।

किसी त्रिभुज के आधार के दो कोण बराबर हों तो त्रिभुज समद्विबाहु होगा।

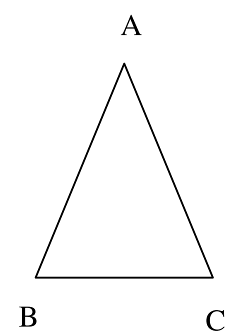
यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष से आधार पर डाला गया लंब आधार को समद्विभाजित करता है तो वह त्रिभुज समद्विबाहु होगा।

समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष से आधार को समद्विभाजित करने वाली रेखा आधार पर लंब होती है।

4. <u>त्रिभुजो की असमान भुजा संबंधी प्रमेय</u> (त्रिभुजों के कोणों एवं भुजाओं में संबंध पर आधारित प्रमेय)

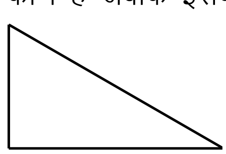
(i) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है। इसकी जांच के लिये कोई त्रिभुज ABC बनाइये, इसके बाद इसकी तीनों भुजाओं को अलग–अलग नाप कर परीक्षण कीजिये।

AB	……	AB+B	BC+A	AB+A
BC	……	……	……	……
AB	……	क्या AC से बड़ा है	क्या AB से बड़ा है।	क्या BC से बड़ा है।

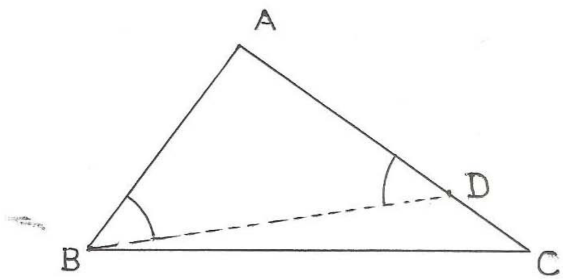


इसी प्रकार अन्य त्रिभुज बना कर परीक्षण करने पर आप पाएंगे कि त्रिभुज – की किसी भी दो भुजा का योग तीसरी भुजा से बड़ी होती है।

(ii) किसी त्रिभुज में सबसे बड़े कोण के सामने की भुजा सबसे बड़ी होती है। एवं सबसे छोटे कोण के सामने की भुजा सबसे छोटी होती है। इसे एक गतिविधि द्वारा समझा जा सकता है। एक त्रिभुज बनाएं जिसकी भुजा अलग–अलग माप की हों । सुविधा की दृष्टि से एक रेखा $AB = 4$ सेंमी की खींचे। A बिन्दु पर चांदे की सहायता से 90^0 का कोण बनाएँ। $AC = 3$ सेंमी काट लें और BC को मिला दें। अब त्रिभुज ABC के शेष दोनों कोणों को चांदा से नापे तो पायेंगे कि $\angle B$ का मान $\angle C$ से कम है। $\angle B$ एवं $\angle C$ का मान 90^0 से कम है। अब BC की माप फुटा से लें इसकी लंबाई 5 सेमी है। इस प्रकार हम पाते हैं कि सबसे बडी भुजा $BC = 5$ सेमी. के सामने का कोण $\angle A = 90^0$ है जो $\angle B$ एवं $\angle C$ से बडी है। $\angle B$ सबसे छोटा कोण है जबकि इसके सामने की भुजा AC इन तीनों भुजाओं में सबसे छोटी हैं।



(iii) यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाए असमान हो तो बड़ी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।



दिया है – ABC एक त्रिभुज है जिसमें $AC > AB$

सिद्ध करना है कि – $\angle ABC > \angle ACB$

रचना – AC में $AB = AD$ काटा, BD को मिलाया।

उपपत्ति – ΔABD में $AB = AC$, $\angle ABD = \angle ADB$ ....(1)

ΔBDC में बहिष $\angle ADB = \angle BCD + \angle DBC$

$\therefore \angle ADB > \angle BCD$ या $\angle BCD$ .... (2)

समी. (1) और (2) से –

$\angle ABD > \angle BCA$

$\Rightarrow$ $\angle ABC > \angle ABD > \angle BCA$

$\angle ABC > \angle ACB$

इति सिद्धम

इसी प्रकार इसके विलोमतः सिद्ध कर सकते हैं कि किसी त्रिभुज में बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है।

(iv) किसी बिन्दु से किसी सरल रेखा पर खींचे गये सभी रेखाखंडो में से लंबवत रेखाखंडों सबसे छोटी होती है।

(v) किसी त्रिभुज में किसी भी दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से छोटी होती है।

5. पाइथागोरस प्रमेय एवं उनके अनुप्रयोग

पाइथागोरस प्रमेय के नाम से प्रचलित प्रमेय वास्तव में बौद्घायन प्रमेय है इसकी रचना बौद्धायन ने पायथागोरस से बहुत पहले कर ली थी। इस प्रमेय के अनुसार समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गो के योग के बराबर होता है।

यदि ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B$ समकोण है तो कर्ण^2=ल^2+आ^2

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

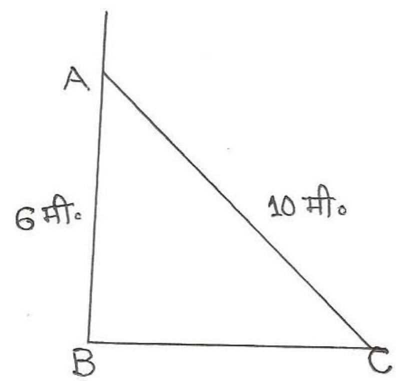
अनुप्रयोग – एक 10 मीटर लंबी सीढ़ी किसी मकान की दीवार से लगाई जाती है तो सीढ़ी दीवार पर 6 मीटर की उंचाई पर बने खिड़की तक पहुंचती है तो दीवार से सीढ़ी की दूरी क्या होगी –

हल –

कर्ण $AC = 10$ मीटर

लंब $AB = 6$ मीटर

$\therefore$ दीवार से सीढी की दूरी $BC = ?$



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(10)^2 = (6)^2 + BC^2$

$BC^2 = 100 - 36$

$= 64$

$BC = \sqrt{64}$

$8m.$

इसी तरह के अनेक प्रश्न बनाकर हल कराये जा सकते हैं।

पाठगत प्रश्न

8. एक त्रिभुज के दो कोण 75^0 के है तो तीसरा कोण है –

   (a)30^0 (b).105^0 (c)90^0 (d). 100^0

9. एक त्रिभुज की दो भुजाऐं समान है एवं कोण 90^0 है तो त्रिभुज होगा

   (a)समबाहु (b)विषमबाहु (c)समद्विबाहु (d) समकोण समद्विबाहु

10. एक समकोण बनाने वाली भुजा की लंबाई 12 मी. एवं 5मी. है तो कर्ण की लंबाई है–

   (a) 13 मी. (b)14 मी. (c)17 मी. (d)7 मी.

त्रिभुज की रचना करना जबकि

दो भुजाएं एवं उनके बीच का कोण दिया है –

यदि किसी त्रिभुज ABC की भुजा AB एवं AC दिये हो उनके बीच बनने वाले कोण $\angle BAC$ का मान दिया हो तो त्रिभुज की रचना करने के लिये– त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों के नाम

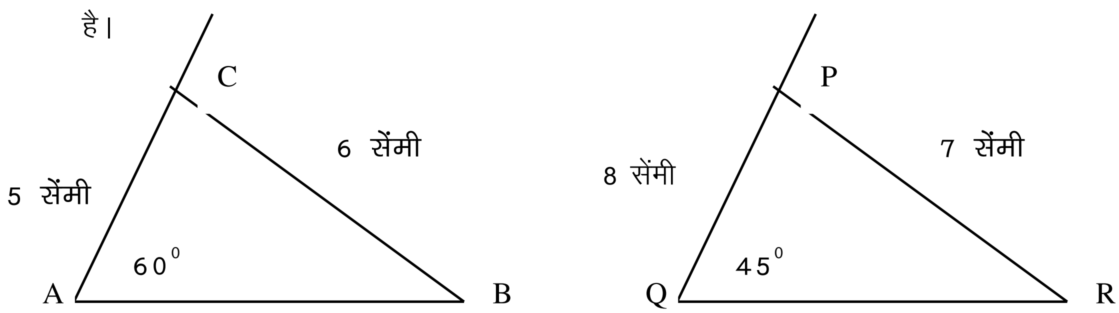
निर्धारित करने के लिये सर्वप्रथम त्रिभुज का एक रफ चित्र बनाकर निश्चित करना चाहिये कि किस शीर्ष या भुजा को क्या नाम देना है। यहां चूंकि AB और AC भुजा की माप एवं उनके बीच बनने वाले कोण की माप दी गई हैं इसलिये AB या AC को आधार भुजा ले सकते हैं।

अब त्रिभुज की रचना करने के लिये AB रेखा खीचते है। बिन्दु A पर परकार या चांदे की सहायता से $\angle BAC$ बनाते हैं व इस रेखा को बढ़ाते हैं। अब A से AC के बराबर चाप इस रेखा पर काटते हैं। इस प्रकार बिन्दु C प्राप्त होता है। अब BC को मिला देते हैं इस प्रकार अभीष्ट त्रिभुज ABC प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण –

(i) ABC एक त्रिभुज बनाइये जिसकी भुजा $BC=6$ सेंमी., $AC=5$ सेंमी $\angle BAC = 60^0$ हैं।

(ii) PQR एक त्रिभुज बनाइये जिसकी भुजा $PQ=8$ सेंमी $\angle PQR=45^0$ एवं भुजा $PR=7$ सेंमी है।



<u>जबकि त्रिभुज के दो कोण एवं एक भुजा दिया गया हो</u> – यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा व दो कोण दिये हों तो सर्वप्रथम आधार भुजा खींचते हैं इसके दोनों सिरों पर दिये गये कोण की रचना चांदा या परकार से कहते हैं।

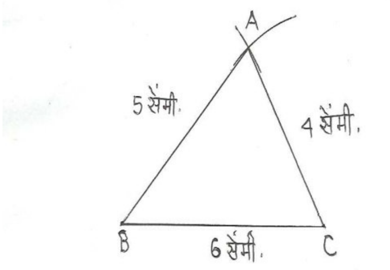
$\triangle PQR$ की रचना कीजिये जिसकी भुजा $QR=7$ सेमी. एवं $\angle Q=30^0$ एवं $\angle R = 60^0$ है।

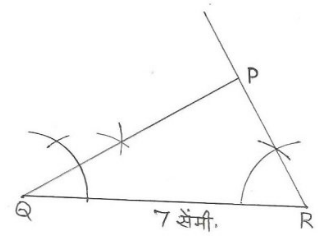
सर्वप्रथम QR=7 सेंमी की रेखा खींचते हैं। बिन्दू Q पर 30^0 एवं R पर 60^0 का कोण चांदे या परकार से बनाकर रेखाओं को बढ़ाते हैं जो P पर मिलती है। यही अभीष्ट त्रिभुज PQR है।

<u>जबकि त्रिभुज की तीनों भुजाएं दिये गये हो</u>– जब $\triangle$ की तीनों भुजाओं की लम्बाई की माप दिये गये हों तो आधार भुजा निर्धारित कर आधार रेखा खींचते हैं। अब इसके दोनों सिरों से दी गई लम्बाई की चाप काटते हैं। दोनों चाप जिस बिन्दू पर कटते हैं वह त्रिभुज की तीसरा शीर्ष होता है। इसे आधार रेखा के सिरों से मिलाने पर अभीष्ट त्रिभुज प्राप्त होता है।

उदाः– ABCएक त्रिभुज की रचना कीजिये जिसकी भुजा AB=5 सेंमी, BC=6 सेंमी AC=4 सेंमी है। सर्वप्रथम BC=6 सेंमी की रेखा खींचते है। अब B बिन्दु से 5 सेंमी एवं C बिन्दू से 4

सेंमी.की चाप काटते हैं जो एक दूसरे से A पर मिलती है। अब AB एवं AC को मिला दिया।इस प्रकार अभीष्ट ABC प्राप्त होता है।





जबकि समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं एक भुजा अथवा एक न्यून कोण दिया गया हो –

समकोण ΔABC की रचना करना जबकि कर्ण AC एवं भुजा BC या AB दिया हो –

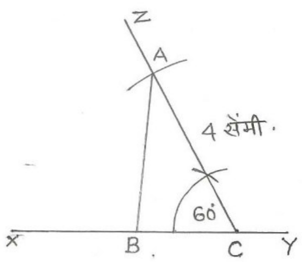
सर्वप्रथम BC रेखा खींचिये। B बिंदु पर 90^0 का कोण परकार या चांदे की सहायता से बनाते हैं अब C बिन्दु से AC चाप काटते हैं जो BX को A पर काटती है यही त्रिभुज ABC अभीष्ट समकोण त्रिभुज है। इसे उदाहरण एक द्वारा समझा जा सकता है।

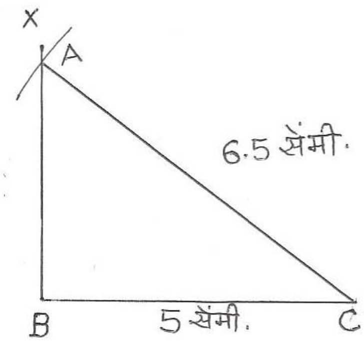
समकोण त्रिभुज ABC की रचना करना जबकि कर्ण AC एवं एक न्यून कोण दिया हो –

सर्वप्रथम XY एक रेखा खींचा। XY रेखा पर एक बिंदु C लिया। बिन्दु C पर दिया गया न्यून कोण बनाया। CZ पर एक चाप CA ज्ञात लंबाई का काटा। अब A बिंदु से XY पर AB लंब डाला। इस प्रकार अभीष्ट समकोण ΔABC प्राप्त होता है। इसे उदाहरण दो द्वारा समझा जा सकता है।

उदाहरण – 1. ABC एक समकोण त्रिभुज बनाइये जिसका कर्ण $AC = 6.5$ सेंमी एवं एक भुजा $BC = 5$ सेंमी है। सर्वप्रथम $BC = 5$ सेंमी की रेखा खींचा। B बिंदु पर परकार या चांदे की सहायता से 90^0 का कोण बनाकर BX रेखा खींचा। C बिंदु से $CA = 6.5$ सेंमी की चाप BX पर काटा। AC को मिलाया। ΔABC अभीष्ट समकोण त्रिभुज है।

उदाहरण –2. ABC एक समकोण त्रिभुज बनाइये जिसका कर्ण $AC = 4$ सेंमी एवं $\angle C = 60^0$ हैं। सर्वप्रथम XY एक रेखा खींचा । XY पर एक बिन्दु C लिया। बिन्दु C पर $\angle C = 60^0$ बनाया। C से $AC = 4$ सेमीं का चाप CZ पर काटा। अब A बिंदु से $AB \perp XY$ खींचा। इस प्रकार अभीष्ट समकोण त्रिभुज ABC बना।





अभ्यास प्रश्न –

(11) ΔABC की रचना कीजिये जिसमें भुजा $a = 5.5$ सेंमी $c = 5.5$ सेंमी तथा $\angle B = 60^0$ है।

(12) एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिये जिसकी भुजा $a = BC = 5.4$ सेंमी $b = AC = 6.3$ सेंमी और $c = AB = 4.7$ सेंमी।

(13) ΔABC की रचना कीजिये जिसमें $\angle B = 45^0$ एवं $\angle C = 60^0$ है। तथा आधार $BC = 6$ सेंमी है।

(14) एक समकोण ΔABC की रचना कीजिये जिसका कर्ण $AC = 7$ सेंमी एवं $\angle C = 45^0$ हैं।

6. **चतुर्भुज की अवधारणा** – किन्हीं चार रेखाखंडों से घिरा हुआ समतल या सतह चतुर्भुज कहलाते हैं या चार असंरेखीय बिन्दुओ से निर्मित आकृतियों को चतुर्भुज कहते हैं। चदि चार रेखाखंड AB, BC, CD एवं DA हो तो इसे चतुर्भुज $ABCD$ कहते हैं।

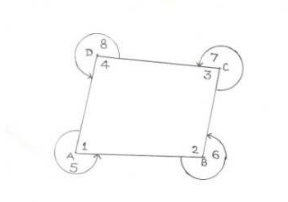
चतुर्भुज $ABCD$ में –

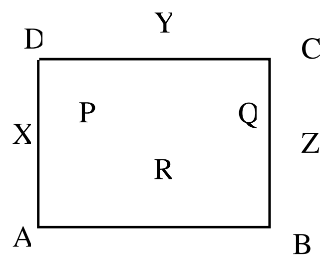
1. शीर्ष – बिन्दु A, B, C, D को चतुर्भुज $ABCD$ का शीर्ष कहते हैं।
2. भुजा – रेखाखंड $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ और $\overline{DA}$ को चतुर्भुज $ABCD$ की भुजा कहते हैं।
3. विकर्ण – रेखाखण्ड $\overline{AC}$ एवं $\overline{BD}$ को चतुर्भुज $ABCD$ का विकर्ण कहते हैं।
4. संलग्न भुजाऐं – चतुर्भुज की दो भुजा जिसके उभयनिष्ठ शीर्ष (सिरे) हों संलग्न भुजाऐं कहलाती हैं। चतुर्भुज $ABCD$ में $(AB, BC), (BC, CD), (CD, DA)$ एवं (DA, AB) चार जोड़ी संलग्न भुजाएं हैं।
5. सम्मख भुजाएं – चतुर्भुज की वे दो भुजाएं जिसके कोई उभ्यनिष्ठ सिरे न हों वे चतुर्भुज की सम्मुख भुजाऐं कहलाती हैं। चतुर्भुज ABCD में $(AB, CD), (BC, AD)$ दो सम्मुख भुजाओं के जोड़े हैं।
6. आसन्न कोण – चतुर्भुज के दो कोण जिसकी आधार भुजा उभयनिष्ट हों उसे चतुर्भुज का आसन्न कोण कहते हैं। $(< A, < B), (< B, < C), (< C, < D), (< D, < A)$ चतुर्भुज के चार जोड़े आसन्न कोण हैं।
7. सम्मुख कोण – चतुर्भुज के दो कोण जिसकी उभयनिष्ठ भुजाएं न हो वे चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के जोड़े कहलाते हैं। $(< A, < C), (< B, < D)$ चतुर्भुज की दो जोड़ी सम्मुख कोण हैं।

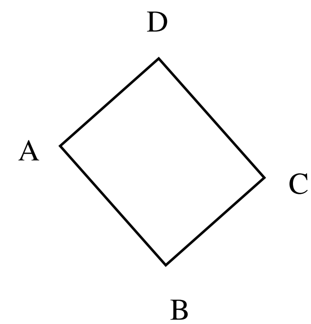
चतुर्भुज के अन्तः एवं बाह्य कोण –

चतुर्भुज की किसी भी दो भुजाओं द्वारा अन्तः भाग में बना कोण चतुर्भुज का अन्तः कोण एंव बाह भाग में बना कोण चतुर्भुज का बाह्य कोण कहलाता है।

चित्र में भुजा AB, AD द्वारा बना कोण $<1, AB, BC$ द्वारा बना कोण $<2. BC, CD$ द्वारा बना कोण <3 एवं CD, AD द्वारा बना कोण <4 चतुर्भुज का अन्तः कोण एवं क्रमानुसार ली गई भुजाओं द्वारा बना कोण $<5, <6, <7, <8$ चतुर्भुज का बाह्य कोण कहलाता है।







चतुर्भुज का अन्तः एवं बाह् भाग – चतुर्भुज $ABCD$ के चारों भुजाओं से घिरे भाग के भीतर स्थित भाग को चतुर्भुज का अन्तः भाग एवं शेष भाग को चतुर्भुज का बाह् भाग कहते हैं। चित्र में $P, Q, R, ...$ अन्तः भाग में एवं X, Y, Z बाह् भाग में स्थित है।

चतुर्भुज का वर्गीकरण –

(i) विषम चतुर्भुज – ऐसे चतुर्भुज जिसकी सभी चारो भुजाओं की लंबाईयों की माप भिन्न–भिन्न हो उसे विषम चतुर्भुज कहते हैं।

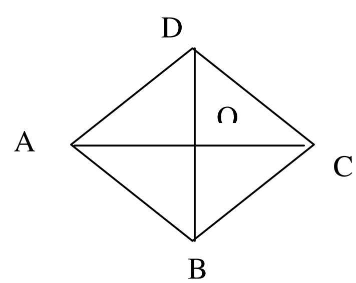
(ii) समचतुर्भुज – ऐसे चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाओं की लंबाईयों की साप समान हों किन्तु उनके विकर्ण असमान हों एवं विकर्ण एक दूसरे पर लंबार्द्धक हो, समचतुर्भुज कहलाते हैं।

$AB = BC = CD = AD$

$AC \neq BC$

$AC \perp BC$

$OA = OC$ या $OB = OD$



(iii) **समलंब चतुर्भुज –** ऐसे चतुर्भुज जिसकी एक जोड़ी सम्मुख भुजा समांतर एवं शेष दो भुजाऐं असमांतर हो यदि दोनों असमांतर भुजाऐं समान हो तो यह समलंब समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है। दोनों असमांतर भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा समलंब चतुर्भुज की माध्यिका कहलाती है।

(iv) समांतर चतुर्भुज – ऐसे चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजा परस्पर बराबर एवं समांतर होती है। समांतर चतुर्भुज कहलाती हैं।

गुण – 1. सम्मुख भुजाओं के प्रत्येक युग्म समान होते हैं।

2. सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म समान होते हैं।

3. दोनों विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

समांतर चतुर्भुजों पर आधारित प्रमेय –

(i) यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युगल (जोड़ा) समान एवं समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होगा।

(ii) यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाऐं समान हों तो वह समांतर चतुर्भुज होगा।

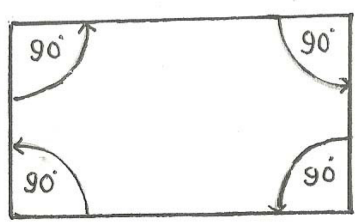
(iii) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें तो वह समांतर चतुर्भुज होगा।

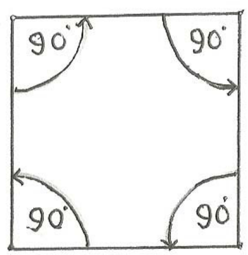
(iv) यदि किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे पर लंब हो तो वह समचतुर्भुज होता है।

(v) समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित होते हैं।

(vi) किसी समचतुर्भज के विकर्ण परस्पर लंबवत होते हैं।

आयत – एक समांतर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण समकोण होता है आयत कहलाता है।



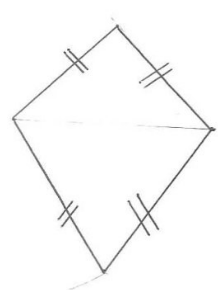


वर्ग – एक आयत जिसके प्रत्येक भुजा की लंबाई समान हो, वर्ग कहलाता हैं।

पतंगाकार चतुर्भुज – (काइट) एक चतुर्भुज जिसके दो संलग्न भुजाओं के जोडे अलग–अलग बराबर होते हैं। पतंगाकार चतुर्भुज कहलाते हैं। चित्र में

$AB = BC$

$AD = CD$



चतुर्भुज में समरूपता एवं समता की धारणा–

(i) दो चतुर्भुज आपस में समरूप होंगे यदि उनके संगत कोण बराबर हों एवं संगत भुजाऐं समानुपाती हों।

(ii) पतंगाकार चतुर्भुज के एक विकर्ण द्वारा बना दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

(iii) दो समचतुर्भुज समरूप होंगे यदि उनकी संगत भुजाओं का अनुपात समान होता है।

(iv) दो वर्ग हमेशा समरूप होते हैं।

(v) दो आयत समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाओं का अनुपात समान है।

समांतर चतुर्भुज संबंधी प्रमेय

(i) यदि किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण समान है तो वह आयत होता है।

(ii) किसी आयत के विकर्ण समान होते हैं।

(iii) यदि किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे पर लंब और तुल्य हैं तो वह वर्ग होता है।

(iv) किसी वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बना चतुर्भुज भी वर्ग ही होता है।

आयत समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल संबंधी प्रमेय –

(i) किसी समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो समान क्षेत्रफलों के त्रिभुजों में विभक्त करता है।

(ii) यदि दो समांतर चतुर्भुज एक ही आधार पर व समांतर रेखाओं में एक ही युग्म के बीच स्थित हो तो उनके क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

(iii) एक ही आधार व समांतर रेखाओं के एक ही युग्म के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

(iv) एक ही आधार व समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज व आयत क्षेत्रफल में आपस में बराबर होते हैं।

(v) यदि एक त्रिभुज एवं एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार व समांतर रेखाओं के बीच स्थित हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

पाठगत प्रश्न –

15. चतुर्भुज $ABCD$ में आसन्न भुजाएं हैं।

(a) AB, CD (b). AB, BC (c) AD, BC

16. समांनान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में कोण बराबर होते हैं।

(a) $< A =< B$ (b) $< B =< C$ (c). $< A =< C$

17 $ABCD$ समलंब चतुर्भुज होगा यदि

(a) $AB = CD$ (b). $AB // CD$ (c). $AB = BC$

18. सम चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को एक बिन्दु पर काटते है तो

(a) एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

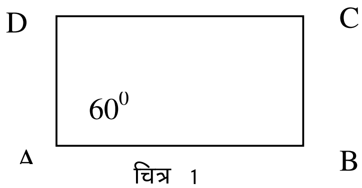
(b) आपस में लंब होते हैं।

(c) वे लम्बार्धक होते हैं।

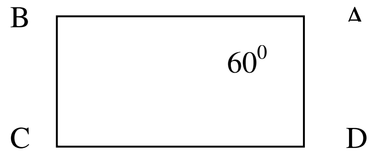
चतुर्भुज की रचना करना जबकि –

चारो भुजाऐं एवं एक कोण दिये हों –

$ABCD$ एक चतुर्भुज बनाइये जिसकी भुजा $AB = 5$ सेंमी $AD = 4$ सेंमी $BC = 6$ सेंमी, $CD = 4$ सेंमी एवं $< A = 60^0$ है।

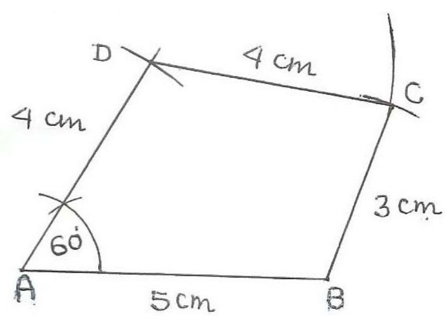


चित्र 1



सर्वप्रथम एक रफ चतुर्भुज बनाकर तय करते हैं कि किस बिन्दु को कहां लेना ज्यादा उचित व सुविधाजनक होगा। संलग्न चित्र में यदि $< A = 60^0$ के स्थान पर C पर A लिया जाय तो भी चतुर्भुज बन सकता है किन्तु वह सुविधाजनक नहीं होगा इसलिये प्रत्येक ज्यामितीय रचना करने से पहले रफ आकृति बनाकर कार्य योजना बनाना चाहिये कि कौन सा बिन्दु कहां लेना न्यायोचित एवं सुवधिाजनक होगा। चित्र 1 का नामांकन ज्यादा सही व सुविधाजनक है। अब सर्वप्रथम $AB = 5$ सेंमी की रेखा खींच कर A बिंदु पर चांदा या परकार की सहायता से 60^0 का कोण बनाकर इसकी भुजा को बढ़ाते है। अब इस रेखा पर AD=4 सेंमी की चाप काटते हैं। अब D से CD=4 सेमीं एवं BC=3 सेंमी की चाप इस प्रकार बनाते हैं कि वह $\angle BAD$ के अन्तः भाग में एक बिन्दु पर कटे यही अभीष्ट चतुर्भुज $ABCD$ बना।

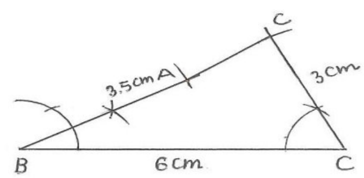
चित्र



<u>**तीन भुजायें व दी गई एक भुजा के कोण दिये हों –**</u>

$ABCD$ एक चतुर्भुज की रचना कीजिये जिसकी भुजा BC= 6 सेंमी AB= 3.5 सेंमी. CD= 3 सेंमी एवं $\angle B = 30^0$ एवं $\angle C = 60^0$ हो

सर्वप्रथम BC= 6 सेंमी की रेखा खींचते हैं अब B एवं C सिरे पर क्रमशः 30^0 एवं 60^0 का कोण बनाते हैं। B व C से क्रमशः 3.5 सेंमी एवं 3 सेंमी की चाप, कोण बनाने वाली रेखा पर काटते हैं एवं इसे क्रमशः A एवं D बिन्दु नाम देते हैं। अब A एवं D को मिला देते हैं। चतुर्भुज ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है।



<u>चारों भुजायें एवं एक कर्ण दिये हों–</u>

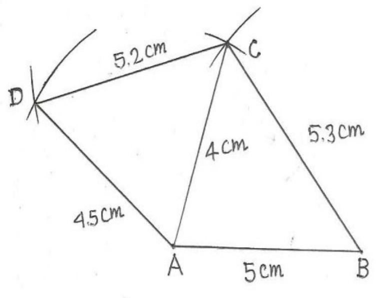
ABCD एक चतुर्भुज की रचना कीजिये जिसकी भुजा AB= 5 सेंमी. BC = 5.3 सेंमी कर्ण AC = 4 सेंमी. भुजा AD = 4.5 सेंमी एवं CD = 5.2 सेंमी हों।

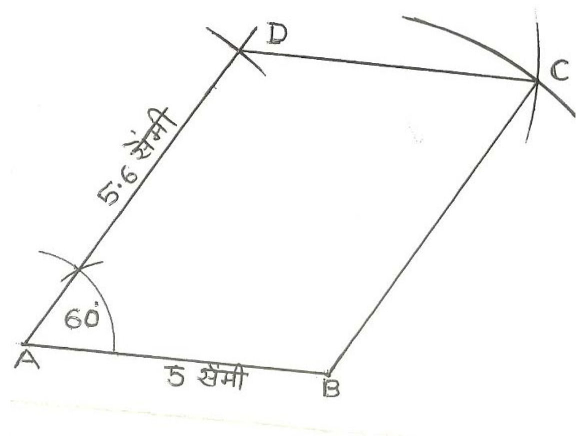
सर्वप्रथम AB = 5 सेंमी की रेखा खींचते हैं अब A एवं B से क्रमशः 4 सेंमी, एवं 5.3 सेंमी की चाप काटते हैं दोनों चापों के कटान बिन्दु को बिन्दु C नाम देते हैं AC एवं BC को मिला देते हैं। अब A एवं C बिन्दु से क्रमशः 4.5 सेंमी एवं 5.2 सेंमी की चाप इस प्रकार लेते हैं कि दोनो ंएक दूसरे को एक बिन्दु पर काटे। इस बिन्दु को D नाम देते हैं AD एवं CD को मिला दिया। ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है।

<u>समांतर चतुर्भज की दो आसन्न भुजायें एवं उनके अतंर्गत कोण दिये गये हैं –</u>

ABCD एक समांतर चतुर्भुज की रचना कीजिये जिसमें आसन्न भुजायें AB=5 सेंमी AD=5.6 सेंमी एवं इनके बीच का कोण 60^0 हों।

सर्वप्रथम AB=5 सेंमी की रेखा खींचते हैं बिन्दु B पर 60^0 का कोण बनाकर इस पर 5.6 सेंमी की चाप काटते हैं। अब B एवं D से क्रमशः 5.6 सेंमी एवं 5 सेंमी की चाप इस प्रकार काटते हैं कि वे एक दूसरे से एक बिन्दु पर कटे। इस बिन्दु को C नाम देते हैं अब CD एवं BC को मिला दिया। ABCD अभीष्ट समांतर चतुर्भुज है।

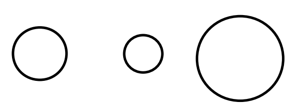




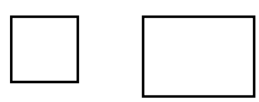
<u>विभिन्न रेखागणितीय आकृतियों में समरूपता का बोध –</u>

में समरूपता को स्पश्ट किया जा चुका है यहां हम केवल ज्यामितीय आकृतियों में समरूपता को समझेंगे।

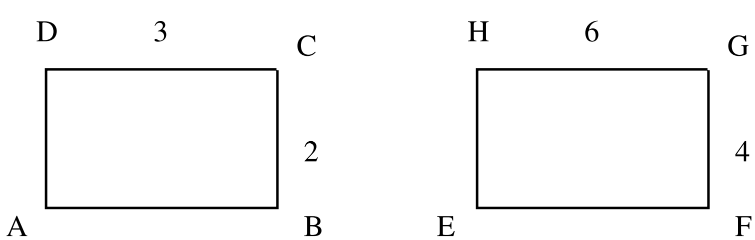
1. कोई भी दो वृत्त आपस में समरूप होते हैं चाहे उसकी त्रिज्या कुछ भी क्यों न हो।



2. कोई भी दो वर्ग आपस में समरूप होंगे चाहे उसकी भुजा कुछ भी लिया गया हो।



3. दो आयत आपस में समरूप होंगे यदि उसकी लंबाई व चौड़ाई का अनुपात समान हो।



$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2} = \frac{EF}{GF} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

4. दो चतुर्भुज समरूप होंगे यदि उनकी संगत भुजा का अनुपात समान हों एंव संगत कोण बराबर हों।

<u>त्रिभुज के समरूप होने की शर्ते –</u>

दो त्रिभुज आपस में समरूप होंगे यदि –

(i) उनके कम से कम दो संगत कोण समान हों।

(ii) त्रिभुजों की भुजाओं का अनुपात समान हो।

(iii) दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गो के अनुपात के बराबर हो।

(iv) दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत उंचाइयों के वर्गो के अनुपात में हों।

पाठगत प्रश्न – सत्य/असत्य चुनिये –

19. दो वृत्तों की त्रिजया क्रमशः 5 सेंमी व 6 सेंमी है तो वे समरूप नहीं होंगे।

20. दो वर्ग की समान भुजायें क्रमशः 4 सेंमी. एवं 7 सेंमी है तो आपस में समरूप होंगे।

21. एक आयत की लंबाई व चौड़ाई क्रमशः 5 सेंमी व 6 सेंमी. है एक दूसरे आयत की लंबाई व चौड़ाई क्रमशः 7 सेंमी. व 8सेमी. है तो वे समरूप होंगे।

22. दो त्रिभुजों का क्षेत्रफल 16 व 4 वर्ग मी. है उनकी दो संगत भुजा की लांबई 2 व एक मीटर है तो दोनों त्रिभुज समरूप हैं।

23. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल क्रमशः 9 व 36 वर्ग सेंमी. है यदि एक त्रिभुज की उंचाई 2.4 सेंमी. है तो दूसरे त्रिभुज की उंचाई है –

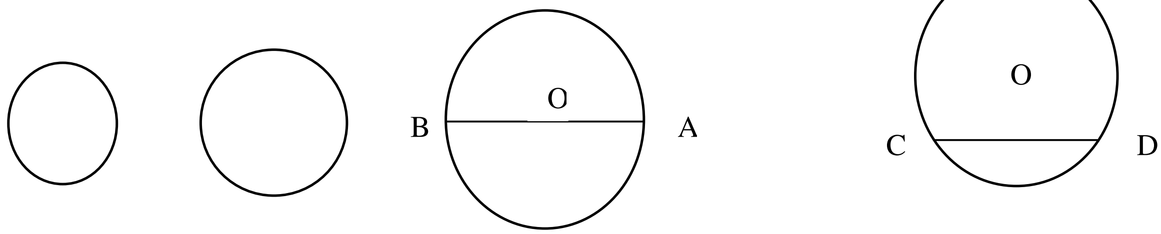
(a) 2.4 सेंमी. (b) 4.8 सेंमी. (c) 4.5 सेंमी. (d) 1.4 सेंमी.

उपइकाई –तीन

वृत्त की धारणा – समतल में एक बिन्दु लेते हैं एक परकार की नोंक को इस बिन्दु पर लेकर पेंसिल वाले भाग को बिन्दु के चारो ओर घुमाने से जो आकृति बनती है वह वृत्त कहलाता है अब समतल में कोई अन्य बिन्दु लेकर परकार के दोनों भुजा को थोडा दूर कर पुनः पेंसिल से आकृति बनाते हैं यह भी वृत्त है किन्तु इस वृत्त का आकार पहले वाले वृत्त के आकार से बड़ा है।

अतः समतल में एक बिन्दु से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ वृत्त कहलाता है। वह बिन्दु O जिससे बिन्दुपथ खींचा गया है वृत्त का केन्द्र कहलाता है। केन्द्र O से बिन्दुपथ की दूरी $OA = OB = r$ वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। O से खीचां गया बिन्दुपथ वृत्त की परिधि कहलाता है। केन्द्र O से परिधि पर खीची गई कोई भी रेखा वृत्त की त्रिज्या है एवं एक वृत्त की सभी त्रिज्याओं की लंबाई बराबर होती है। वृत्त की परिधि के दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है वृत्त का ब्यास कहलाता है। चित्र में AB व्यास है। AB व्यास $= OA + OB = r + r = 2r$

व्यास $(AB) = 2\times$ त्रिज्या

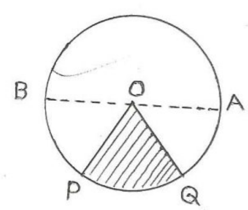


वृत्त के किसी दो बिन्दुओं को मिलाने वाली वक्र रेखा जो परिधि का भाग होता है चाप कहलाता है। चित्र में C एवं D को मिलाने वाला परिधि का भाग चाप $\overset{\frown}{CD}$ कहलाता है।

वृत्त के किसी दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा जीवा या चापकर्ण कहलाता है। चित्र में CD जीवा या चापकर्ण हैं। वृत्त की परिधि के भीतर के भाग को वृत्त का आंतरिक भाग एवं परिधि के बाहर के भाग को वृत्त का बाह्य भाग कहते हैं।

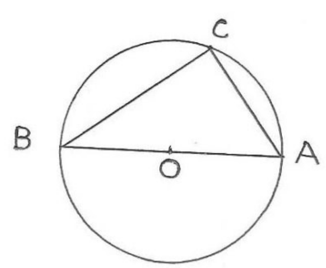
<u>वृत्तीय एवं अर्धवृत्तीय कोण –</u> वृत्त के केन्द्र पर बना कोण (जिसका मान 360^0) वृत्तीय कोण कहलाता है। वृत्त का व्यास वृत्त को दो बराबर भागों में बांटता है। इसलिये अर्द्धवृत्त द्वारा केन्द्र पर बना कोण अर्धवृत्तीय कोण कहलाता है। चित्र में $\angle ACB = 180^0$ अर्धवृत्तीय कोण है।

<u>वृत्त खंड एवं त्रिज्या खंड –</u> वृत्त की जीवा वृत्त को दो भागों में बाँट देता है इन दोनों भागों को वृत्त खंड कहते हैं। बडे भाग को दीर्घ अवधा (खंड) एवं छोटे भाग को लघु अवधा (खंड) कहते हैं।



दो त्रिज्या के बीच घिरा वृत्त के क्षेत्र का भाग त्रिज्या खंड कहलाता है। चित्र में त्रिज्या OP एवं OQ से घिरा क्षेत्र POQ त्रिज्या खंड कहलाता है।

<u>वृत्तार्ध का कोण –</u> अर्धवृत्त की परिधि के C बिन्दु पर बने कोण का मान $m\angle BCA = 90^0$ होता है ।

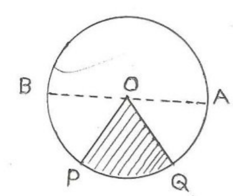


<u>किसी चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण –</u>

परिधि द्वारा केन्द्र पर बना कोण $= 2\pi$

$2\pi r$ द्वारा **केन्द्र पर बना** $= 2\pi$

1 **द्वारा केन्द्र पर बना कोण** $= \dfrac{2\pi}{2\pi r}$



चाप $\overset{\frown}{PQ}$ **द्वारा केन्द्र पर बना कोण =** $\dfrac{\text{चाप}\,\overset{\frown}{PQ}}{r}$

यदि $\angle POQ = \theta$ हो तो

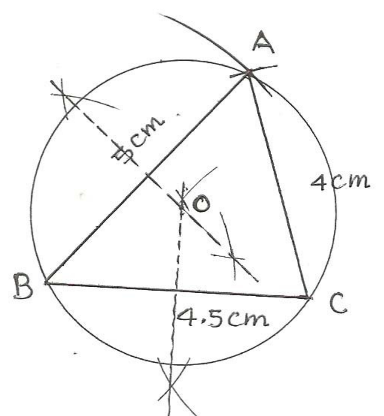
$$\theta = \frac{\text{चाप } \overset{\frown}{PQ}}{r}$$

1.त्रिभज के परिगत बर्हिगत और अन्तर्गत वृत्त की रचना :–

त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना –

उदाहरण – ABC एक त्रिभुज की रचना कीजिये जिसकी भुजा $AB=5$ सेंमी $BC=4.5$ सेंमी एवं $AC=4$ सेंमी है इस त्रिभुज के परिगत, बहिर्गत और अन्तर्गत वृत्त की रचना कीजिए,

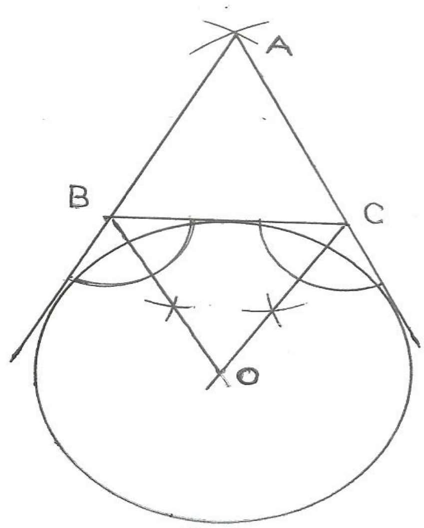
1. त्रिभुज की रचना छात्राध्यापक स्वयं इसी इकाई में त्रिभुज की रचना शीर्षक अनुसार करें अब त्रिभुज की भुजा AB एवं BC को समद्विभाग करते हैं। AB एवं BC की समद्विभाजक रेखा एक दूसरे को जिस बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है उसका नाम O देते हैं। अब $OA=OB=OC$ को त्रिज्या मानकर एवं O को केन्द्र मानकर एक वृत्त खीचते हैं जो A,B एवं C से होकर जाता है यही वृत्त अभीष्ट वृत्त कहलाता है।



परिगत वृत

त्रिभुज के बर्हिगत वृत्त की रचना –

1. अब ΔABC की भुजा AC एवं BC को पीछे की ओर बढ़ाते हैं। $\angle BAX$ एवं $\angle ABY$ को समद्विभाग करते हैं। ये दोनों समद्विभाजक रेखा O पर मिलती हैं। O से $OD \perp AB$ डालते हैं। अब O को केन्द्र एवं OD को त्रिज्या मानकर वृत्त खीचते हैं जो AX, BY एवं AB को स्पर्श करती हुई जाती है यही अभीष्ट बहिर्गत वृत्त हैं।



2. **<u>त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की रचना करना</u>** उपरोक्त विधि से त्रिभुज बनाने के बाद आन्तरिक कोण $\angle A$ एवं $\angle B$ को समद्विभाग करते हैं। इसकी समद्विभाजक रेखाएँ परस्पर O पर मिलती हैं। O से $OD \perp AB$ डालते हैं अब O को केन्द्र एवं OD को त्रिज्या मानकर एक वृत्त खीचते हैं जो त्रिभुज की भुजा AC, BC को छूती हुई जाती है। यही अभीष्ट अंतर्गत वृत्त हैं।

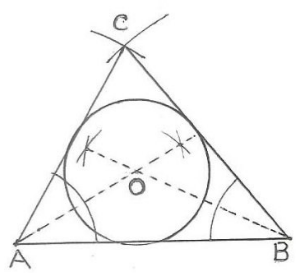
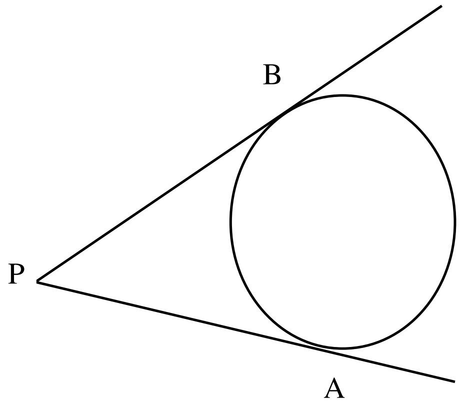


fig 36

<u>2.वृत्त की परिधि के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा खीचना–</u>

सर्वप्रथम $c(o,r)$ एक वृत्त बनाते हैं (यहां c वृत्त o केन्द्र एवं r त्रिज्या है) अब परिधि पर बिन्दु P लेते हैं जिस पर स्पर्श रेखा खीचना हैं OP को मिलाया। अब OP के P पर बिन्दु चांदे की सहायता से 90^0 का कोण बनाया एवं इसे P के दोनों और बढ़ाया, यही वृत्त की परिधि के P बिन्दु पर अभीष्ट स्पर्श रेखा है।



विशेषताऐं –

(i) स्पर्श रेखा परिधि को केवल एक ही बिन्दु पर स्पर्श करती हैं।

(ii) स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लंब होती है।

<u>वृत्त की परिधि के किसी बिन्दु पर बाहरी बिन्दु से स्पर्श रेखा खीचनां –</u> सर्वप्रथम $c(o,r)$ एक वृत्त बनाते हैं वृत्त के बाहर माना कि p कोई बिन्दु है। p से वृत्त पर स्पर्श रेखा खीचंना है। इसके लिये एक स्केल के एक किनारे को p बिन्दु से मिलाते हुए परिधि के पास लाते हुए परिधि पर एक बिन्दु इस प्रकार लेते हैं कि स्केल परिधि को केवल इसी बिन्दु A पर स्पर्श करे इसी प्रकार दूसरी और B बिन्दु परिधि पर प्राप्त करते है। अब AP, BP को मिलाते हैं। यही AP, BP अभीष्ट स्पर्श रेखा है।

विशेषताऐं

बाह्य बिन्दु से वृत्त पर केवल दो स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। दोनों स्पर्श रेखा की लंबाई समान होती हैं।

पाठगत प्रश्न – सत्य/असत्य चुनिये –

पाठगत – रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

24. यदि किसी वृत्त की त्रिज्या 5सेमी. है एवं चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण $\pi/3$ है तो चाप की लंबाई .... सेमी है।

25. यदि वृत्त की त्रिज्या 5 सेंमी. है तो वृत्त के ब्यास की लंबाई .... है।

26. एक ही वृत्त की सभी त्रिज्या .... होती है।

27. अर्धवृत्त का कोण .... होता है।

28. त्रिज्या खंड द्वारा केन्द्र पर बना कोण .... होता है।

सत्य असत्य चुनियें

29. किसी त्रिभुज के परिगत वृत्त बनाने के लिये त्रिभुज की किसी दो भुजा को समद्विभाग कर परिकेन्द्र ज्ञात करते हैं।

30. किसी त्रिभुज के बहिर्गत वृत्त बनाने क लिये त्रिभुज के किसी दो भुजा के पीछे की ओर बढ़ाने पर बने बहिषकोणों को समद्विभाग कर वहिर्गत वृत्त के केन्द्र ज्ञात करते हैं।

31. वृत्त की परिधि के किसी एक बिन्दु से एक से अधिक स्पर्श रेखा खीचीं जा सकती है।

32. वृत्त पर किसी बाह् बिन्दु से दो से अधिक स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती।

33. बाह् बिन्दु से वृत्त पर खीचीं गई स्पर्श रेखाएं समान नहीं होती हैं।

इकाई सारांश

1. रेखागणित में भारत का महत्वपूर्ण योगदान है शुल्व शास्त्र में इसका उपयोग वेदियों के निर्माण में परिलक्षित होता है।
2. त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग दो समकोण होता है।
3. चतुर्भुज के चारों अन्तः कोणों का योग 360^0 चार समकोण होता है।
4. किसी त्रिभुज का बहिषकोण सुदूर अन्तः कोणों के योग के बराबर होता है।
5. यदि दो समांतर रेखा को एक अन्य रेखा काटती है तो संगत कोण, एकांतर कोण बराबर होते हैं।
6. त्रिभुजों की सर्वांगसमता की शर्ते 1. भुजा–भुजा–भुजा 2. भुजा – कोण – भुजा
   3. कोण–भुजा–कोण 4. समकोण–कर्ण–भुजा है।
7. यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएं समानुपाती हों तो वे समरूप होते हैं।
8. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गो के अनुपात के बराबर होता है।
9. वृत्त का ब्यास उसकी त्रिज्या का दुगुना होता है।
10. वृत्त का कोण समकोण होता है।
11. वृत्त के चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण = चाप/त्रिज्या
12. वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाग करता है।

आत्म परीक्षण प्रश्न –

1. कोटिपूरक, सम्पूरक कोण की परिभाषा लिखिए।
2. यदि दो रेखा एक दूसरे को काटती है तो सिद्ध कीजिए कि शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।
3. सिद्ध कीजिये कि किसी त्रिभुज की तीनों अन्तः कोणों का योग 180^0 होता है।
4. सिद्ध कीजिये की वृतार्ध का कोण समकोण होता है।
5. त्रिभुज की सर्वांगसमता की शर्ते लिखिए।
6. त्रिभुज की समरूपता की शर्ते लिखिए।

गतिविधियां एवं नियत कार्य –

1. रेखागणित से संबंधित अन्य संदर्भित पुस्तक पढ़िये
2. प्राचीन भारतीय गणित की पुस्तकें पढ़िए।
3. सममिति के अन्य उदाहरण ढूंढिए।

चर्चा तथा स्पष्टीकरण के बिन्दु –

यदि इस इकाई को पढ़ने के बाद आप किन्हीं बिन्दुओं पर और आगे चर्चा या स्पष्टीकरण चाहते हैं तो उन्हें नीचे लिखिए।

चर्चा के बिन्दु

....

....

स्पष्टीकरण के बिन्दु –

....

....

पाठगत प्रश्न उत्तर

1. वृहत कोण 2, असमान 3. 180^0 4. d विषमवाहु 5. b अनंत 6. b 120^0 7. a 90^0

8- a 30^0 9. d समकोण समद्विवाहु 10. a 13 मी. 15. b AB, BC 16. c
17 . $AB \parallel CD$ 18. (c) लम्बार्धक 19. असत्य 20. सत्य 21. असत्य 22. असत्स 23. b 4.8 24 $\frac{5\pi}{3}$ 25. 10 सेंमी 26. समान 27. समकोण 28. चाप/त्रिज्या 29. सत्य 30. सत्य 31. असत्य 32. सत्य 33. असत्य

पत्राचार पाठ्यक्रम

माध्यमिक शिक्षा मंडल, मध्य प्रदेश, भोपाल

प्रश्न पत्र—पंचम

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

प्रथम वर्ष

विषय — गणित और उसका शिक्षण

इकाई 6 से 10

इकाई – 6 सूचकांक –डी. एड./V/ 6

पत्राचार पाठ्यक्रम

माध्यमिक शिक्षा मंडल, म.प्र. भोपाल

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

विषय – गणित और उसका शिक्षण प्रश्न पत्र– पंचम पाठ् क्रमांक–6

विषयांश उपइकाई एक

त्रिभुजाकार, वर्गाकार, आयताकार, समान्तर चतुर्भुजाकार विषमबाहु चतुर्भुजाकार, समचतुर्भुजाकार, वृत्ताकार क्षेत्रों का क्षेत्रफल निकालना

उपइकाई–दो घन, घनाभ , लम्ब वृत्तीय बेलन एवं गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ, आयतन एवं वक्रपृष्ठ ज्ञात करना, कमरे की दीवालों का क्षेत्रफल ज्ञात करना। ठोस आकारों के पृष्ठों का क्षेत्रफल से संबंधित प्रश्न।

प्रस्तावना

प्रस्तुत पाठ विषय क्षेत्रमिति लम्बाइयाँ क्षेत्रफल व आयतन नापने से संबंधित है। इसका ज्ञान दैनिक जीवन के लिए उपयोगी है इसमें हम विभिन्न आकृतियों के क्षेत्रों का क्षेत्रफल निकालना, घन , घनाभ बेलन गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ, आयतन एवं वक्रपृष्ठ ज्ञात करने के सूत्र आदि का अध्ययन करेंगे।

गणित की जिस शाखा के अतंर्गत हम समतल आकृतियों के परिमाप क्षेत्रफल, ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल, आयतन आदि ज्ञात करने की विधियों का अध्ययन करते हैं, क्षेत्रमिति (Mensuration) कहलाती है।

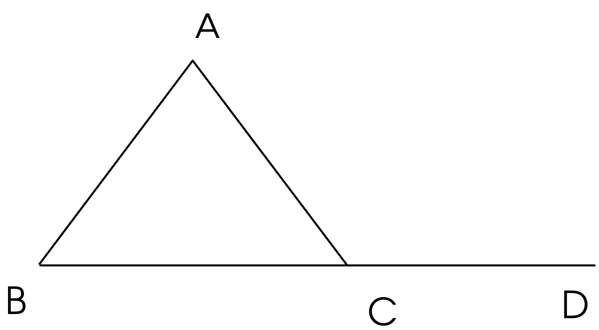
Menstruation शब्द यूनानी भाषा के शब्द Menstruationसे बना है जिसका अर्थ है 'मापन'।

उपइकाई –एक

परिभाषाएं

त्रिभुजाकार (Triangle)

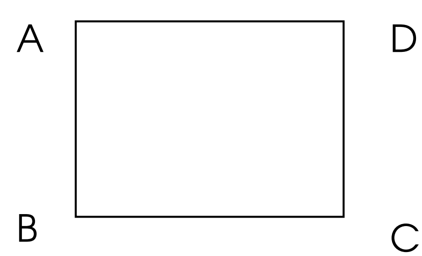
त्रिभुज तीन असमरेख को मिलाने से बनी आकृति को त्रिभुज कहते हैं। A B C तीन बिन्दु है जो एक सीधी रेखा में नहीं है। इनको मिलाने से बनी आकृति ABC त्रिभुज कहलाती है।



इस प्रकार के त्रिभुज में तीन शीर्ष A, B, C तीन भुजाएं AB, BC , AC तीन अन्तः कोण $\angle$ ABC , $\angle$ BCA, $\angle$ CAB होते है। $< ACB$ बहिष कोण है।

वर्गाकार (**Square**)

वर्ग वह चतुर्भुज है, जो कि समकोणिक और समबाहु है



शीर्ष – A, B, C, D

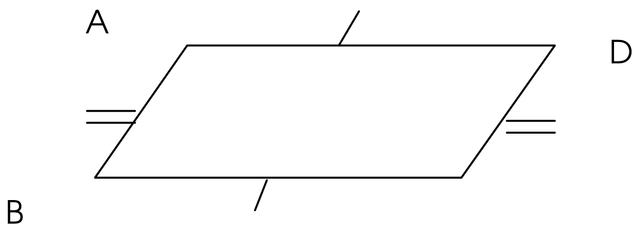
चार भुजाएं – AB, BC, CD, DA

आयताकार (**Rectangle**)

आयत वह समकोणिक चतुर्भुज होता है जिसकी लम्बाई चौड़ाई से बड़ी होती है।

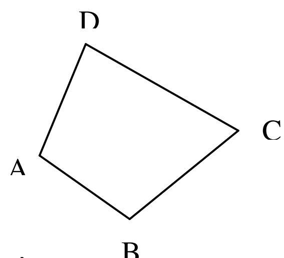
समान्तर चतुर्भुजाकार (**Parallelagram**)

समान्तर चतुर्भुज में आमने–सामने की भुजाएं बराबर व समांतर होती है।



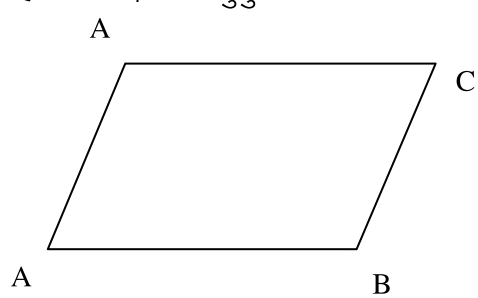
विषमबाहु चतुर्भुजाकार

वह चतुर्भुज जिसक चारो भुजाएं की लम्बाई की माप भिन्न – भिन्न हो अर्थात् असमान हो।



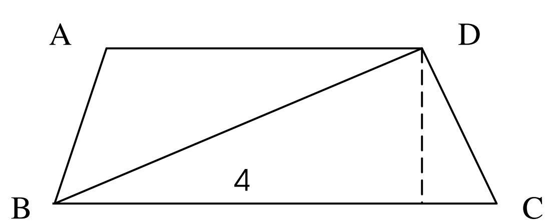
समचतुर्भुजाकार (**Rhombus**)

वह समान्तर चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएं बराबर होती हैं, समचतुर्भुज कहलाता है। समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित होते हैं।



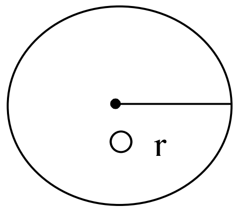
समलम्ब चतुर्भुज (**Trapezium**)

वह चतुर्भुज जिसकी दो सम्मुख भुजाएं समान्तर तथा शेष दो भुजाएं असमान्तर हों, समलम्ब चतुभुज कहलाता है। दोनों समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी इस चतुर्भुज की ऊंचाई कहलाती है।



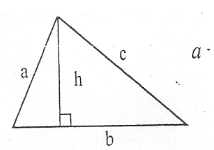
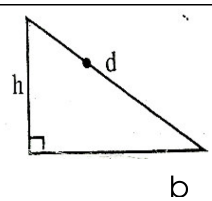
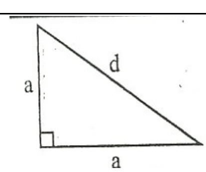
वृत्ताकार (Circle)

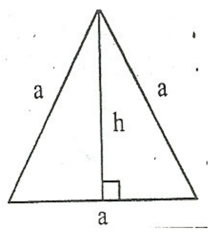
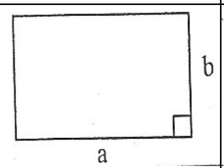
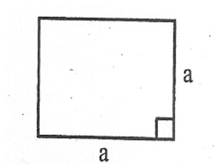
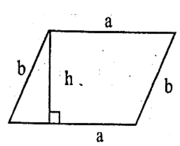
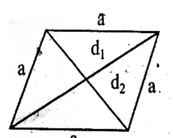
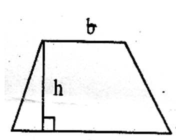
किसी समतल में एक नियत बिन्दु से समान दूरी पर स्थित समस्त बिन्दुओ से बनी आकृति को वृत्त कहते हैं। उस नियत बिन्दु को वृत्त का केन्द्र (centre) तथा उस पूरी को वृत्त की त्रिज्या (radius) कहते हैं।

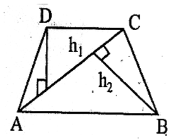
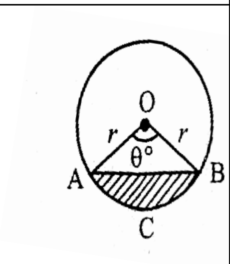


क्षेत्रफल –

समतल आकृतियों की परिमिति व क्षेत्रफल के सूत्र

क्र.	नाम	आकृति	परिमिति	क्षेत्रफल	संकेत नाम
1.	त्रिभुज		इकाइयाँ $2S = a + b + c$	वर्ग इकाइयाँ 1. या $\frac{1}{2}b \times h$ 2. $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	a, b, c भुजाओं की लम्बाइयाँ है $h =$ ऊचाई $s = \frac{a+b+c}{2}$
2.	समकोण त्रिभुज		$b + h + d$	$\frac{bh}{2}$	$d^2 = b^2 + h^2$ पाइथागोरस प्रमेय $d =$ कर्ण
3.	समद्विबाहु समकोण		$2a + d$	$\frac{1}{2}a^2$	$d = a\sqrt{2}$

4.	समबाहु त्रिभुज		$3a$	1. $\frac{1}{2}ah$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2$	ऊँचाई $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
5.	आयत		$2(a+b)$	ab	$a =$ लम्बाई $b =$ चौड़ाई
6.	वर्ग		$4a$	a^2	$a =$ भुजा
7.	समान्तर चतुर्भुज		$2(a+b)$	ah	$b =$ आधार $a =$ संलग्न भुजा $h =$ ऊंचाई
8.	समचतुर्भुज		4a	1. $\frac{1}{2}d_1\, d_2$	$a =$ प्रत्येक भुजा d_1, d_2 विकर्ण $h =$ ऊँचाई
9.	समलम्ब चतुर्भुज		चारों भुजाओं का योग	$\frac{h}{2}(a+b)$	a, b समांतर भुजाओं की लम्बाईयां h समांतर भुजाओं के बीच की दूरी

10.	चतुर्भुज		चारों भुजाओं का योग	$\frac{1}{2}AC(h_1+h_2)$	h_1, h_2, AC विकर्ण पर D, B से लम्ब की लम्बाइयां
11.	1- चाप AB 2. त्रिज्या खंड OAB		चाप AB की लम्बाई $=\left(\frac{\theta}{360}\right)\times 2\pi r$	$\left(\frac{\theta}{360}\right)\times \pi r^2$	$\theta = r$ त्रिज्या के वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण

क्षेत्रफल व परिमाप (Area and Perimeter)

क्षेत्रफल – कोई क्षेत्र अपनी सीमाओं के अन्त में जितना स्थान घेरता है (अर्थात् घिरे क्षेत्र के धरातल का परिमाण) वह उसका क्षेत्रफल कहलाता है। जैसे – यदि मेज पर एक माचिस की डिब्बी रखें तो यह मेज पर कुछ स्थान घेरती है। यदि हम मेज पर पोस्टकार्ड रखें तो यह माचिस से अधिक स्थान घेरता है। यदि मेज पर पुस्तक रखें तो यह माचिस तथा पोस्टकार्ड की तुलना में अधिक स्थान घेरेगी।

अतः हम कह सकते हैं कि प्रत्येक वस्तु कुछ न कुछ स्थान घेरती है इस स्थान के माप को क्षेत्रफल कहते हैं।

परिमाप – यदि कोई समतल आकृति सरल रेखाओं से घिरी है तो आकृति को घेरने वाली सभी रेखाओं की लम्बाइयों का योग उस आकृति का परिमाप कहलाता है।

उदाहरणार्थ (i) त्रिभुज का परिमाप – इसकी तीनों भुजाओं की लम्बाइयों का योग।

(ii) यदि आकृति एक ही वक्र रेखा द्वारा घिरी है, जैसे की वृत्त, तो उस वक्र रेखा की कुल माप वृत्त की परिमाप होती है। परिमाप की इकाई वही होती है जो लम्बाई की होती है।

उदाहरण –1 उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 10 सेमी. तथा ऊँचाई 6 सेंमी है।

हलः त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$\frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 5 \times 6 = 30$ वर्ग. सेंमी

उदाहरण – 2 किसी त्रिभुज की भुजाएं 9 सेंमी, 12 सेंमी और 15 सेंमी है। तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहां त्रिभुज की भुजाएं $a=9$ सेंमी, $b=12$ सेंमी, $c=15$ सेंमी,

त्रिभुज का अर्द्ध परिमाप $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18$ सेंमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$

$= \sqrt{18 \times 9 \times 6 \times 3} = \sqrt{18 \times 9 \times 18} = 18 \times 3 = 54$ वर्ग सेंमी

उदाहरण – 3 किसी वर्ग की भुजा 3 सेंमी है।। इसका विकर्ण तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल – वर्ग की भुजा = 3 सेमी

वर्ग का विकर्ण = भुजा $\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ सेंमी

वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2 = 3^2 = 9$ वर्ग सेंमी

अतः वर्ग का विकर्ण = $3\sqrt{2}$ से.मी तथा क्षेत्रफल 9 वर्ग सेमी है।

उदाहरण : आयात की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 10 सेंमी व 8 सेंमी हैं। आयत का क्षेत्रफल तथा विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल – आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$10 \times 8 = 80$ वर्ग सेंमी

आयत का विकर्ण $= \sqrt{(\text{ल})^2 + (\text{चौ})^2}$

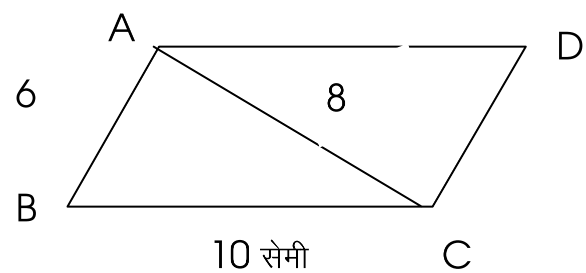
$\sqrt{10^2+8^2}=\sqrt{100+64}=\sqrt{164}=2\sqrt{41}$ सेंमी

उदाहरण 5 – किसी सामान्तर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाएं 6 सेमी और 10 सेंमी. तथा उसका एक विकर्ण 8 से.मी है। समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल भुजा AB = 6 सेंमी

BC = 10 सेंमी

विकर्ण AC = 8 सेंमी



$\triangle ABC$ में, $S=\frac{a+b+c}{2}=12$

अतः सामान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल

$$=2\triangle ABC \text{ क्षेत्रफल}$$

$$=2\times\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

$$=2\times\sqrt{12(12-6)\,(12-10)\,(12-8)}$$

$$=2\times\sqrt{12\times6\times2\times4}=48 \text{ वर्ग सेंमी.}$$

उदाहरण –6 एक चतुर्भुजाकार खेत का विकर्ण 72 मीटर है। उस पर सम्मुख शीर्षों से डाले गए लम्ब क्रमशः 22.5 मीटर एवं 35 मीटर हैं। खेत का क्षेत्रफल निकालिए।

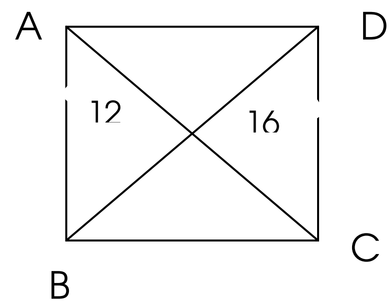
हल :– चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\times \text{विकर्ण} \times \text{सम्मुख शीषों से उस पर खीचें गसे लम्बों का योग}$$

$$= \frac{1}{2}\times72\times(22.5+35)$$

$$= 36\times57.5 = 2070 \text{ वर्ग मीटर}$$

उदाहरण :–7 यदि किसी समतचुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 12 सेंमी और 16 सेंमी. हो तो उसका क्षेत्रफल तथा भुजा ज्ञात कीजिए।



हल :– संलग्न चित्र के समतुर्भुज ABCD में

AC = 12 सेंमी . BD = 16 सेंमी

अतः समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times$ दोनों विकर्ण का गुणनफल

$$\frac{1}{2}\times AC\times BD$$

$$\frac{1}{2}\times 12\times 16=96$$ वर्ग सेंमी

पुनः समकोण $\triangle AOD$ में, $AD^2=AO^2+OD^2$

$$=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2=\left(\frac{12}{2}\right)^2+\left(\frac{16}{2}\right)^2$$

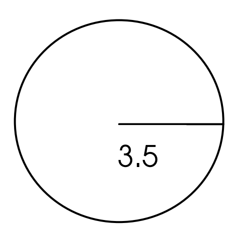
$$=6^2+8^2$$

$$=36+64=\sqrt{100}=10$$ सेंमी.

उदाहरण :– 8 यदि वृत्त की त्रिज्य 3.5 सेंमी. है तो क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :–वृत्त का क्षेत्रफल $=\pi r^2$

$$\frac{22}{7}\times(3.5)^2$$



$$\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5$$

38.5 सेंमी^{2}

पाठगत प्रश्न –

1. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 10 सेंमी. तथा ऊँचाई 6 सेमी. है।

2. एक समकोण त्रिभुज का परिमाप 60 सेंमी तथा कर्ण 26 सेंमी हैं। त्रिभुज की अन्य दो भुजाएं तथा उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. एक आयात की लंबाई 22 सेंमी तथा चौड़ाई 15 सेंमीं है आयत का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. एक वर्ग का परिमाप 64 मीटर है उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. एक सामान्तर चतुर्भुज का विकर्ण 10 सेंमी. तथा उस पर सम्मुख शीर्ष से खीचा गया लम्ब

4 सेंमी. है। चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. एक वृत्त की परिधि 88 मी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर :–1 30 वर्ग सेंमी. 2. अन्य भुजाएं – 24 सेमी तथा 10 सेंमी, क्षेत्रफल 120 वर्ग सेंमी

3. 74 से.मी , 330 वर्ग सेंमी 4. 256 वर्ग मी. 5. 40 वर्ग सेंमी 6. 616 व मी

उपइकाई – 2

ठोस आकृतियों के पृष्ठ तथा आयतन व क्षेत्रफल

घनाभ तथा घन (Cubodi and cube)

घनाभ :– छह आयताकार समतलों से बनी आकृतियों जिनके आसन्न फलक परस्पर लम्ब हैं, को घनाभ कहते हैं।

जैसे पुस्तक, कॉपी, पेंसिल का डिब्बा , ईंट, माचिस की डिब्बी आदि

चित्र में a , b व c , क्रमशः घनाभ की लम्बाई चौड़ाई व ऊंचाई है। अतः

घनाभ का आयतन $V = abc \text{ or } lbh$

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ $S = 2\,(ab + bc + ca) \quad or \quad 2(lb + bh + hl)$

घनाभ का विकर्ण $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad or \quad \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

घन – ऐसा घनाभ जिसके सभी कोरों की लम्बाइंया बराबर होती हैं। उसे घन कहते हैं । घन का प्रत्येक फलक एक वर्ग होता है।

जैसे – पांसा

घन का अयातन $V=a^3$ जहां a = घन की भुजा

घन का सम्पूर्ण पृष्ठ $S=6a^2$

घन का विकर्ण $d=a\sqrt{3}$

नोट : प्रत्येक में 6 फलक और 12 कोरें होते हैं।

उदाहरणः–1 एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 4.0 मी, 3.0 मी और 4.5 मी. है। घनाभ का आयतन और पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल :– घनाभ का आयतन ल × चौ. × ऊं = l×b×h

= 4×3×4.5 = 54 घन मी.

घनाभ का पृष्ठ = 2 (ल. × चौ. + चौ × ऊं + ऊं × ल)

$$= 2(4\times3+3\times4.5+4.5\times4)$$
$$= 2(12+13.5+18)$$
$$= 2\times43.5$$

$=87$ वर्ग मी.

अतः घनाभ का आयतन = 54 घन मी. और पृष्ठ 87 वर्ग मी. है।

उदाहरण :– 2 एक घन का अयातन 729 घन सेंमी है। घन की कोर और पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल :– घन की भुजा = $\sqrt[3]{\textit{घन का आयतन}}$

दिये घन की भुजा = $\sqrt[3]{729}$ *सेंमी*

$= \sqrt[3]{9 \times 9 \times 9} = 9$ *सेंमी*

घन का पृष्ठ = 6 $(\text{भुजा})^2$ = 6 $\times 81 = 486$ वर्ग मी.

उदाहरण :– 3

एक 5.0 मी. × 2.0 मी. आयताकार पेंदे वाले हौज में 1.5 मी. ऊंचाई तक पानी भरा है। ज्ञात कीजिए कि हौज में कितने लीटर पानी भरा है दिया है 1 घन मी. = 100 लीटर

हल – हौज में पानी का आयतन = हौज की ल. × चौ × पानी की ऊंचाई

$5.0 \times 2.0 \times 1.5 = 15$ घन मी.

1 घन मी. = 1000 लीटर

पानी का आयतन = 15 × 1000 = 15000 लीटर

पाठगत प्रश्न – 2

1. किसी घनाभ का आयतन 880 सेंमी 3 आधार का क्षेत्रफल 44 वर्ग सेंमी है। तो ऊंचाई ज्ञात करो।

2. एक घनाभ की लम्बाई 15 मी., चौड़ाई तथा ऊंचाई 4 मी है। घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ, आयतन तथा विकर्ण ज्ञात कीजिए।

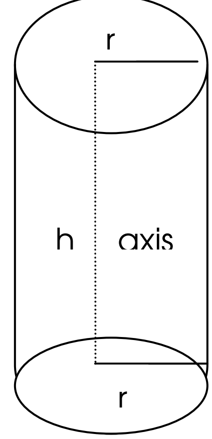
3. एक धातु की बनी आयताकार पट्टिका 56 × 44 सेंमी की है। इसके प्रत्येक कोने से 8सेमी का वर्ग काटकर व इसे मोड़कर एक खुला बाक्स बनाया गया है। इस बक्से का आयतन ज्ञात करो।

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

1. 20 सेंमी   2. 600 मी^3, 500 मी^2 , 19 मी. (लगभग)   3. 8960 cm^3

लम्ब वृत्तीय बेलन

दैनिक जीवन में ऐसी आकृतियाँ देखने को मिलते हैं जिनकी पार्श्व पृष्ठ वक्र हो तथा अनुप्रस्थ परिच्छेद (Cross section) सर्वांगसम वृत्त हो जैसे पाइप, रोलर, पेट्रोल का ड्रम, गोल खम्भे इत्यादि। ऐसी आकृतियां को बेलन कहते हैं।



यहां हम बेलन से अभिप्राय लम्बवृत्तीय बेलन ही लेंगे।

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r(r+h)$

बेलन का वक्रतल $= 2\pi rh$

उदाहरण :– 1 एक लम्बवृत्तीय बेलन की परिधि 132 सेमी. तथा उसकी ऊचांई 20 सेंमी है। बेलन का वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : बेलन का वक्रपृष्ठ = आधार की परिधि × ऊंचाई

= 132 × 20

2640 वर्ग सेंमी

उदाहरण :–2 एक लम्ब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठ सिरों के क्षेत्रफल का दूना है इसकी ऊंचाई एवं आधार के व्यास का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल :– वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

सिरों का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

प्रश्नानुसार $2\pi rh = 2(2\pi r^2)$

$$h = 2r$$

h = d

h:d=1.1

उदाहरण :—3 एक कुआं 6 मी गहरा है। इसकी अन्दर की सतह को 50 पैसे प्रति डेमी.^{2} की दर से सीमेंट कराने पर व्यय 1320 रू आता है। कुएं की त्रिज्या ज्ञात करो।

हल :– कुंए की अन्दर की सतह

$$2\pi rh = \frac{\frac{4}{3}\pi 4^3}{\frac{4}{3}\pi \times 2^3}$$

$$= \frac{64}{8} = 8 \text{ गोले}$$

$2\pi rh = 2640$ डेमी^{2}

$\therefore \quad 2\pi r \times 60 = 2640$

$\therefore \quad r = \dfrac{2640 \times 7}{2 \times 22 \times +60} = 7$ डेमी.

आत्मपरीक्षण — 3

1. उस लंब बेलन का वक्रतल संपूर्ण पृष्ठ और आयतन ज्ञात करो जिसकी उंचाई 14 सेंमी. व आधार की त्रिजया 7 सेंमी हैं।
2. एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठ 1000 वर्ग सेंमी तथा आधार की त्रिज्या 20 सेंमी हो तो इसकी उंचाई ज्ञात कीजिए।

   आत्म परीक्षण प्रश्नों के उत्तर– (1) 616 सेंमी , 924 वर्ग सेंमी, 2156 घन सेंमी

   (2) 7.95 सेंमी

6.6 गोला — किसी दिये गये बिन्दु से जिसे इसका केन्द्र कहते है आकाश में स्थित समदूरस्थ बिन्दुओं का समुच्चय गोला कहलाता है। इसके किसी बिन्दु की केन्द्र से दूरी गोले की त्रिज्या कहलाती है। गेंद, कांच की गोलियां, फुटबाल, साइकिल के छर्रे, टेनिस की गेंद आदि गोले के कुछ उदाहरण हैं।

केन्द्र से जाने वाले उस रेखा खंड को जिसके छोर बिन्दु वृत्त पर है, गोले का व्यास कहते हैं। इसके द्वारा आकाश में घेरी गई जगह गोले का आयतन कहलाती है।

गोले का वक्रपृष्ठ तथा आयतन (Curved surface and volume of sphere)

गोले का वक्रपृष्ठ — $4\pi r^2$ वर्ग इकाई

गोले का आयतन — $\frac{4}{3}\pi r^3$ घन इकाई जहां r गोले की त्रिज्या है।

उदाहरण — 1 त्रिज्या 4.9 सेमी वाले गोले का आयतन व तल ज्ञात करो।

हल — गोले का आयतन —

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{3}\pi r^3\\
&=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(4.9)^3\\
&=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times4.9\times4.9\times4.9\\
&=\frac{1540\times22}{3}\\
&=\frac{33880}{3}=11293cm^3
\end{aligned}
$$

गोले का तल

$$
\begin{aligned}
&4\pi r^2\\
&=4\times\frac{22}{7}\times(4.9)^2\\
&=314cm^2
\end{aligned}
$$

उदाहरण 2— 4 सेंमी त्रिज्या के लोहे के एक गोले को पिघलाकर 2 सेंमी. त्रिजया के कितने छोटे गोले बनाये जा सकते हैं ?

हल — सूत्र–गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3 cm^3$

लोहे के बडे गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi 4^3 cm^3$

प्रत्येक छोटे गोलें का आयतन $=\frac{4}{3}\pi\times 2^3$ घन सेमी.

$$\frac{\frac{4}{3}\pi 4^3}{\frac{4}{3}\pi\times 2^3}$$

$=\frac{64}{8}=8$ गोले

छोटे गोलें की संख्या – बडे गोले का आयतन/छोटे गोले का आयतन गोले

उदाहरण 3:– 3 मीटर व्यास वाले अर्द्धगोलीय गुम्बद का पृष्ठ रंगवाने का व्यय 2.10 रूपये प्रति वर्ग मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

हल – व्यास – 8 मीटर   त्रिज्या $r=\frac{8}{2}=4$ मीटर

अर्द्धगोलीय गुम्बद का वक्रपृष्ठ $=2\pi r^2=2\times\frac{22}{7}\times4\times4=\frac{704}{7}$ वर्ग मीटर

1 वर्ग मीटर की रंगाई का खर्च है – 210 रू.

$\frac{704}{7}$ वर्ग मीटर की रंगाई का खर्च है $\frac{704}{7}\times2.10$ रू.

$704\times0.30=2110.20$ रू.

पाठगत प्रश्न :– 4

1. एक गोले का आयतन एवं पृष्ठ ज्ञात कीजिए जिसका व्यास 42 सेंमी है।
2. 4.2 सेमी. त्रिज्या वाले गोले का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. शीशे के किसी घन से जिसकी कोर 11 सेंमी. है 0.5 सेंमी व्यास के कितने घेरे बनाये जा सकते हैं।
4. एक गोले का व्यास 6 सेंमी. है उसे पिघलाकर 3 मि.मी. व्यास का तार बनाया गया। तार की लांबई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 1. 38808 सेंमी.^{3}, 5544 सेंमी.^{2} 2. 301.47 सेंमी.^{3}, 221.76 सेंमी^{2}

3. 20328 छर्रे   4. 28800 सेंमी.

<u>कमरो की चारों दीवालों का क्षेत्रफल</u>

कमरों की चारों दीवालों का क्षेत्रफल $=2(l+b)\times h$ जहां $l=$ लंबाई, $b=$चौड़ाई तथा $h=$उंचाई हैं।

उदाहरण – एक कमरे की लंबाई 5 मी. चौडाई 4 मी. तथा उंचाई 3 मी. हैं। कमरे की चारो दीवारों पर 50 पैसे प्रति 1000 वर्ग सेमी. की दर से रंग करने तथा 1.50 प्रति वर्ग मी. की दर से छत का चूना पोतने का क्या व्यय होगा।

हल – कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल

$$= 2(l + b) \times h$$
$$= 2(5 + 4) \times 3$$
$$= 54$$

1000 वर्गसेमी का व्यय = 50 पैसे

1 व.मी. का व्यय – 5 रू.

अतः दीवारों पर व्यय $= 54 \times 5 = 270$ रूपये

छत का क्षेत्रफल $= 5 \times 4 = 20$ व.मी.

अतः चूना पोतने का व्यय $= 20 \times 1.5 = 30$ रू.

कुल व्यय $= 270 + 30 = 300$ रू.

पाठगत प्रश्न – 6

1. एक कमरे की चारो दीवारों का क्षेत्रफल 90.10 व.मी. है। तथा उंचाई 3.40 मी. है। फर्श का परिमाप ज्ञात करों।
2. एक आयताकार कमरे की लंबाई 12 मी. चौड़ाई 9 मी. तथा उंचाई 5 मी. हो तो दीवारों पर चूना कराने का खर्च 10 रू. प्रति वर्ग मी. की दर से ज्ञात कीजिए।

पत्राचार पाठ्यक्रम

माध्यमिक शिक्षा मडंल, म.प्र. भोपाल

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

विषय – गणित और उसका शिक्षण प्रश्न पत्र– पंचम पाठ्यक्रम–7

विषयांश उपइकाई एक

विषयांश–निर्देशांक एवं आलेखों का प्रारम्भिक ज्ञान, दण्डचित्र एवं आयत चित्रों का निर्माण (Raw Data)

उपइकाई–दो प्रारम्भिक आंकड़ों की सहायता से मध्यमान एवं मध्यांक ज्ञान करना।

प्रस्तावना– दैनिक जीवन में विज्ञापनों, समाचार–पत्रों एवम् पत्रिकाओं द्वारा साक्षरता –प्रसार, बाजार–भाव आयात–निर्यात, पंचवर्षीय योजनाओं पर व्यय आदि से संबधित विभिन्न क्षेत्रों की स्थितियों को केवल निरूपित ही नही करते बल्कि भविष्य की स्थितियों की ओर भी संकेत करते हैं।

उदाहरण के लिए राष्ट्रीय जनगणना को ही लें। हमें कुल जनसंख्या, स्त्री–पुरूष अनुपात, आयुवार जनसंख्या, बंटन, साक्षरता दर, धर्म आधारित बंटन व अन्य दूसरे पंहलुओं की जानकारी होनी चाहिए। जो राष्ट्रीय जनगणना से हमें प्राप्त होता है। इन सभी बातों का अध्ययन हम साख्यिकी के अन्तर्गत करते हैं।

सांख्यिकी का अर्थ

सांख्यिकी को अंगेजी भाषा में 'Statistics' कहते है। इसकी उत्पत्ति लैटिन भाषा के शब्द 'Status' इटैलियन शब्द या जर्मन शब्द 'Statistc' से हुई है।

'Statistics' शब्द का प्रयोग जर्मनी के विद्वान गोट फाइट एकैन वाल ने किया था। जिन्हे सांख्यिकी का जन्मदाता माना जाता है।

प्राचीन समय में 'Statistics' शब्द से राज्यों की राजनीतिक स्थिति तथा–जन्मदर, मृत्युदर, जनसंख्या, राज्य की आय आदि विषयों का ज्ञान होता था। लेकिन अब सांख्यिकी का प्रयोग शिक्षा मनोविज्ञान, अर्थशास्त्र तथा कृषि आदि विषयों में भी होने लगा है।

सांख्यिकी एक वैज्ञानिक विधि है। जिसका कार्य भिन्न–भिन्न निरीक्षणों से प्रयोगों के द्वारा प्राप्त या प्रदत्त आँकडों को एकत्र करना, उनका वर्णन करना, व्याख्या करना तथा वर्गीकरण करना होता है। A.L. Bowley के अनुसार ''सांख्यिकी, गणना और माध्यों का विज्ञान है।''

सांख्यिकी का अध्ययन करने के लिए निम्न पदों को समझना आवश्यक है।

1) सांख्यिकी आँकड़े (Statistical Data)

2) सांख्यिकी विधियाँ (Statistical method)

1) सांख्यिकी आँकड़े–उन सभी संख्याओं को जो किसी वस्तु की मात्रा आदि के लिए प्रयोग की जाती है तथा जो किसी उद्देश्य विशेष के लिए की जाती है। सांख्यिकीय आँकड़े कहलाते हैं।

i) सांख्यिकी आँकड़ो (Primary Data)

ये वो आँकड़े होते हैं। जो स्वयं अनुसन्धानकर्ता द्वारा प्रथम बार एकत्रित किए जाते है। ii) द्वितीयक आंकडे– ये आँकड़े मूल रूप में किसी अन्य व्यक्ति द्वारा एकत्रित किए जाते है। किन्तु विश्लेषण के लिए अनसन्धाक द्वारा प्रयोग किए जाते है।

(ii) द्वितीयक आंकड़े–ये आँकड़े मूल रूप में किसी अन्य किसी व्यक्ति द्वारा एकत्रित किए जाते हैं किन्तु विश्लेषण के लिए अनुसानकर्त्ता द्वारा प्रयोग किए जाते हैं।

2. सांख्यिकीय विधियाँ

आँकड़ों को व्यवस्थित करने का ढंग सांख्यिकीय विधि कहलाती है। सांख्यिकी विधियों के मुख्य अंग निम्न प्रकार है।

i) आँकड़ो का संग्रह (Colection Of Data)

ii) वर्गीकरण (Classification)

iii) सारणीयन (Tabulation)

iv) आँकड़ों का चित्रण था आलेखी निरूपण (Diagrammmatic Or Graphical Representation Of Data)

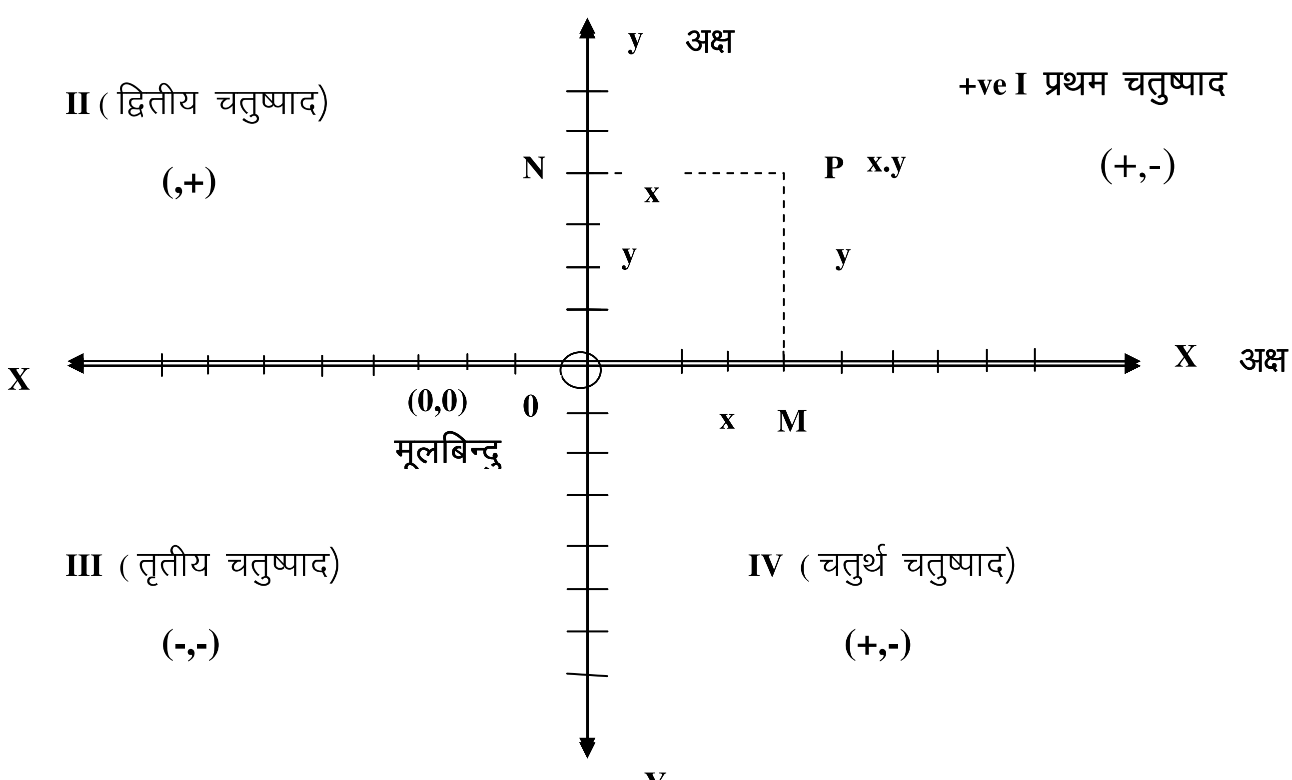
v) आँकड़ों का विश्लेषण (Analysis Of Data)

vi) निर्वचन या व्याख्या (Interpretation)

vii) पूर्वकथन या अनुमान (Prediction)

उपइकाई – एक

किसी तल में बिन्दु की स्थिति दर्शाने हेतु निश्चित बिन्दु से खीची गई परस्पर लम्ब रेखाओं से उस बिन्दु की लम्बवत् दूरियाँ के संख्यात्मक युग्म को उस बिन्दु के निर्देशांक कहते हैं तथा मूल बिन्दु पर खींची गई परस्पर लम्ब रेखाओं को अक्ष कहते हैं। जैसे–



चित्र में बिन्दु P की लम्ब दूरी मूल बिन्दु 'O' से X अक्ष पर OM= X इकाई तथा Y-अक्ष पर ON=Y इकाई है। अतः P–बिन्दु के निर्देशांक को भुज तथा Y- निर्देशांक को कोटि कहते हैं।

मूल बिन्दु से X-अक्ष पर दायी ओर नापी गई दूरियां धनात्मक तथा बांयी और नांपी गई दूरियाँ ऋणात्मक और नीचे की और नापी गई दूरियाँ ऋणात्मक एंव ऊपर की ओर धनात्मक होती है।

दोनों अक्षों के द्वारा तल के जो चार भाग बनते हैं उन्हें चतुष्पाद कहते हैं। जिसके नाम चित्र में दर्शाए अनुसार प्रथम, द्वितीय, तृतीय एवं चतुर्थ चतुष्पाद हैं।

पाठगत प्रश्न

1. मूल बिन्दु के निर्देशांक लिखिये।
2. बिन्दु $A(5,5)$, $B(+2,-3)$ $C(-1,-5)$ एवं $D(4,-3)$ ग्राफ पर अंकित कीजिए।

   आलेख

   आकड़ों का आलेख प्रदर्शन

   ये जटिल आंकड़ों को आसानी से समझने योग्य व अच्छे परिदृश्य देने में सहायक होते हैं।

   आलेख तीन प्रकार से प्रदर्शित होते हैं

   अ) पिक्टोग्राफ (Picto Graph)

   ब) बार चार्ट्स (Bar Charts Bar- Diagram)

   स) पाई चार्ट्स (Pie Charts)

प्रायः सभी आंकड़े उपर्युक्त में से एक से अधिक आलेख को प्रदर्शित कर सकते है। यद्यपि इनमें से प्रत्येक प्रकार का अपना अपना महत्व है जो इसमें प्रदर्शित करने पर प्राप्त होता है।

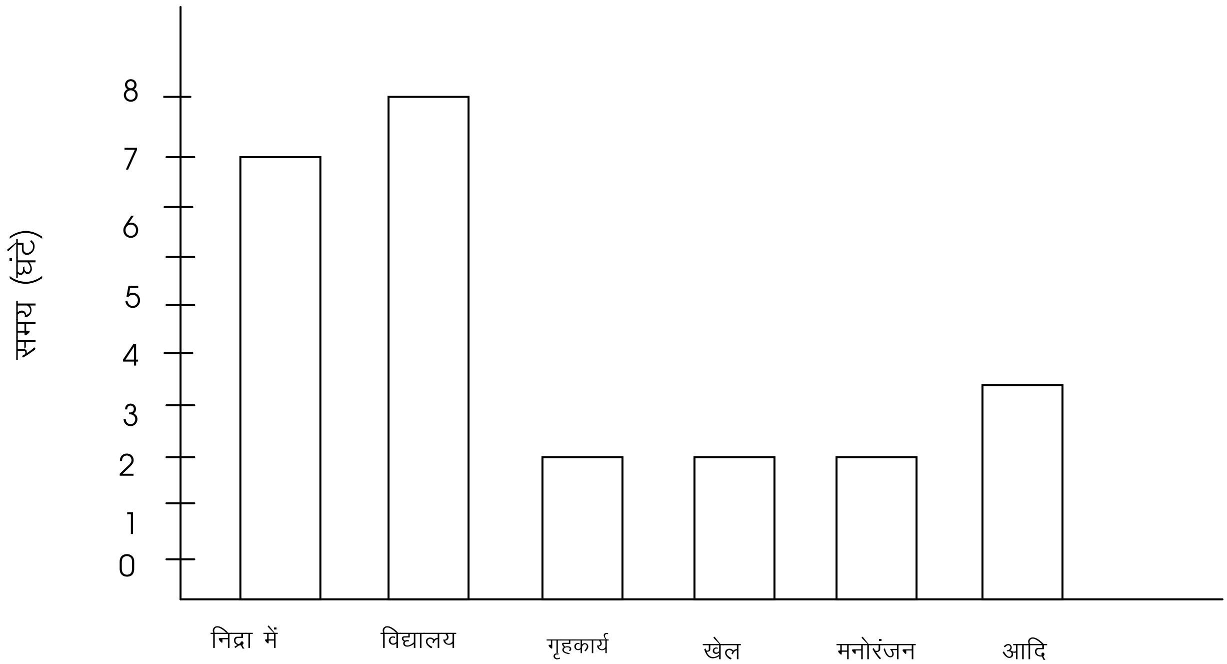
यहाँ पाठ्क्रम अनुसार हम दण्ड आरेख एवं आयत चित्र का अध्ययन करेंगे।

आपने समाचार –पत्रों पत्रिकओं सरकारी सूचनाओं विज्ञपान आदि देंखे होगे जिसमें लंबवत पट्टियों द्वारा आंकड़ों को प्रदिर्शित किया जाता है।

ब) दंड आरेख पृथक्कृत संख्या, तथ्यों के प्रदर्शित करने के लिए दंड आरेख का उपयोग किया जाता है। परिभाषा के अनुपात में दण्ड की लंबाई बनाई जाती है। दंड को क्षैतिज या ऊर्ध्व खींच सकते है। उचित स्केल का चुनाव किया जाता है।

उदाहरण– एक बालक द्वारा निम्न गतिविधियाँ पर बिताया गया समय (घंटो में) दिए आवृति पर दण्ड आरेख बनाइएँ

गतिविध	निद्रा में	विद्यालय	गृहकार्य	खेल	मनोरंजन	अन्य
समय (घंटो में)	7	8	2	2	2	3



गतिविधियां

हम गतिविधियाँ को क्षैतिज रेखा पर लेते हैं। दंड के बीच जगह रखते हैं व दंड की चौड़ाई निश्चित कर समान रखी जाती है। ऊर्ध्व स्केल पर समय (घंटे में) दर्शाते हैं। हम 1 इकाई

= 1 घंटा लेते हैं। व उर्ध्व स्केल पर चिह्न लगाते हैं । समान चौड़ई के दण्ड व क्षमता के अनुसार लंबाई के अनुपात से प्रत्येक खीचा जा सकता है। वही दंड आरेख क्षैतिज दंड बनाकर भी खीच सकते हैं।

पाठगत प्रश्न– किसी गांव में गेहुँ के उत्पादन से संबंधित आंकडों के लिये बार आलेख बनाइये

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010
गेंहुँ (क्वि में)	200	300	350	400	500

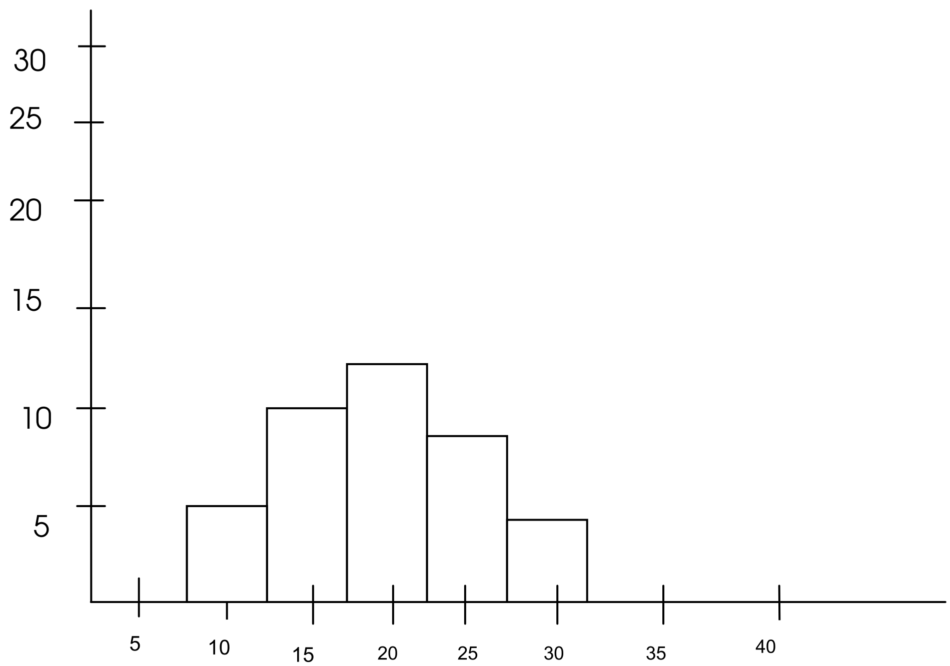
आयत चित्र

दंड आरेख आँकडों के समूह को चित्रित करने की एक सरल विधि है यह एक ऊर्ध्वाधर आरेख है। जिनके दंडों के बीच में कोई खाली जगह नहीं होती है। वर्गीकृत आँकड़ों के बीच में कोई बीच में कोई खाली जगह नहीं होती है। वर्गीकृत आँकड़ो के वर्गान्तर को क्षैतिज अक्ष पर एवं उनसे संबंधित वर्ग की बारबांरता को उर्ध्वारत अक्ष पर रखते हैं और एक उपयुक्त पैमाना लेता है।

प्रत्येक वर्ग के लिए एक आयत की रचना करते है। जिसका आधार वर्ग अन्तराल को दर्शाता है। और जिसकी ऊँचाई का निर्धारण उस वर्ग की बारबांरता के अनुसार हैं।

उदाहरण– नीचे दिए आकड़ो के हिस्तोग्राम बनाइए।

अंक	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35
छात्र संख्या	7	10	14	8	4



आत्मपरीक्षण

1. निम्नाकिंत आंकड़ों से आयत चित्र बनाइए।

प्राप्तांक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
विद्यार्थियों की संख्या	2	4	10	4	3	8	1	5

2. नीचे दिए आकड़ों का हिस्टांग्राम बनाइए।

मासिक आय (रू. में)	425–450	450–475	475–500	500–525	525–550	550–575
का मगारों की संख्या	30	45	75	90	60	40

उपइकाई –दो

<u>प्रारम्भिक आंकड़ों (Raw Data) से बारम्बरता सारणी</u>

बारम्बारता सारणी बनाते समय निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना चाहिए।

1. सबसे पहले प्रारम्भिक आंकड़ों का सावधानी पूर्वक अवलोकन कर आंकड़ों की कुल संख्या एवं आकंड़ों के न्यूनतम मान और अधिकतम मान ज्ञान करते हैं। उन मानों के आधार पर उचित वर्ग–अंतराल के वर्ग बनाते हैं।
2. प्रत्येक वर्ग का वर्ग अंतराल समान एवं पूर्णाक होना चाहिए।
3. वर्गो को बढ़ते क्रम में सारणी के प्रथम भाग के स्तम्भ मे लिखना चाहिए।
4. प्रारम्भिक आँकड़ों में से गिनकर उनकी संख्या बारम्बारता के स्तम्भ में लिखना चाहिए।

उदाहरण– किसी परीक्षा में छात्रों के प्राप्तांक निम्नलिखित अनुसार हैं। उनकी आवृत्ति (बारम्बारता) सारणी बनाओं।

23, 5, 8, 14, 16, 11, 3, 17, 10, 13, 12, 6, 16 ,22 9, 11, 19, 14, 18, 7

वर्ग क्रमांक	वर्ग अतंराल (प्राप्तांक)	टैली चिन्ह	बारम्बारता (परीक्षार्थियों की संख्या)	संचयी बारम्बारता
1	0-5	||	2	2
2	5–10	|||	4	6
3	10–15	|||| ||	7	13
4	15–20	||||	5	18
5	20–25	||	2	20
योग			20	

संचयी बारम्बारता उपरोक्त सारणी के अंतिम स्तम्भ में संचयी बारम्बारता अंकित की गई है। किसी वर्ग की संचयी बारम्बरता प्रारम्भ से उस वर्ग की बारम्बारताओं का योग होती है। अतः अंतिम वर्ग की संचमी बारंबारता दिये गये समस्त आंकड़ों की कुल संख्या के बराबर होती है।

वर्ग अन्तराल (Class Interval): किसी वर्ग की उच्च सीमा और निम्न सीमा के अन्तर को वर्ग अन्तराल अथवा वर्गन्तर कहते हैं। इसे वर्ग माप (Class- Size) भी कहते हैं।

असमूहीकृत एवं समूहीकृत आंकडे–

विज्ञान में 50 विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नानुसार हैं।

17, 71, 79, 14, 22, 30, 55, 59, 23, 87, 93, 21, 22, 50, 87, 54, 94, 52, 87, 74, 43, 87, 28, 24, 17, 49, 85, 81, 76, 50, 21, 86, 50, 87, 50, 95, 32, 40, 30, 90, 27, 89, 81, 21, 14, 30, 37, 22, 26, 87,

यह आँकड़े अपरिष्कृत रूप से दिए गए हैं। इस प्रकार के आँकड़ों को असमूहीकृत (अवर्गीकृत) आँकड़े (Ungroup Data) कहते हैं।

ऊपर दिए आँकड़ों में सबसे कम प्राप्तांक 14 तथा सबसे अधिक प्राप्तांक 95 है। इन प्राप्तांको का अंतर 81 होगा इस अंतर को प्रसार कहते हैं। अतः 10–10 के 8 वर्ग अंतराल लेकर हम वर्गीकृत बारबांरता सारणी बना सकते हैं। इस प्रकार वर्ग अन्तराल 0–10,10–20, 20–30, 30–40, 40–50, 50–60, 60–70, 70–80, 80–90, 90–100, बनायेगा सकते है चुंकि सबसे कम

प्राप्तांक 14 है। अतः 0 और 10 वर्ग अन्तराल की आवृत्ति 0 होगी । इस कारण वर्ग अंतराल को 0–10 से प्रारंभ न करते हुए सीधे 10–20 से प्रारंभ कर सकते हैं।

वर्ग अंतराल	टैली चिन्ह	आवृत्ति
10–20	||||	4
20–30	~~||||~~ ~~||||~~ |	11
30–40	~~||||~~	5
40–50	|||	3
50–60	~~||||~~ |||	8
60–70	....	0
70–80	||||	4
80–90	~~||||~~ ~~||||~~ |	11
90–100	||||	4
योग		50

उपयुर्क्त उदाहरण से स्पष्ट है कि 50 प्रेक्षणों का 10–10 के समूहों में विभाजित कर समूहीकृत बारंबारता बटंन प्रदर्शित किया गया हैं।

वर्ग की सीमांए

उपरोक्त सारणी के प्रत्येक वर्ग में दो संख्याएं दी गई है। जैसे तीसरे वर्ग में 30–40 में 30 को उस वर्ग की निम्न सीमा तथा 40 को उच्च सीमा कहते हैं।

वर्ग अन्तराल = वर्गो को ध्यान से देखने पर ज्ञात होता है कि किसी वर्ग की उच्च सीमा ही अगले वर्ग की निम्न सीमा है। अतः बारम्बरता सारणी बनाते समय ध्यान रखना होगा की किसी भी वर्ग की उच्च सीमा के मान के आँकड़ों को उस वर्ग में नहीं लिया जावें। इसलिए प्रत्येक वर्ग की उच्च सीमा छोड़ देने पर प्रत्येक वर्ग में 10–10 मान रह जाते हैं। जैसे 0 से 10 में वास्तव में 0 से 9 तक के प्राप्तांक वाले परीक्षार्थियों को गिनना है। प्रत्येक वर्ग का सही दस मान 'वर्ग अन्तराल' कहलाता है। यह दोनों सीमाओं का अन्तर होता है।

वर्ग का मध्यमान– किसी भी वर्ग के ठीक मध्य के मान को उस वर्ग का मध्यमान या मध्य मूल्य कहते है यह दोनों सीमाओं का औसत मान होता है जैसे–

वर्ग 10 से 20 का मध्यमान $\frac{10+20}{2}=\frac{30}{2}=15$ है।

$$\frac{\text{या समंक के सभी अवयवों के आंकिक मानों का योग}}{\text{समंक के अवयवों की संख्या}}$$

यादि हम n अलोकनों को $\frac{x_1, x_{2,} x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n}{0}$ लें तो उनका

माध्य $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots x_n}{n}$

$=\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$

उदाहरण 1. एक क्रिकेट टीम के 11 खिलाडियों ने निम्नलिखित रन बनाए तो उनका मध्यमान ज्ञात कीजिए।

$11, 29, 40, 41, 5, 0, 31, 10, 3, 1$

हलः $\bar{x}=\frac{\sum x_n}{n}$ जहाँ n =11 है।

$$\bar{x}=\frac{11+29+40+41+5+0+31+43+3+1}{11}$$

$$\bar{x}=\frac{214}{11}=19.45$$

अतः रनों का मध्यमान =19.45

उदाहरण 2. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात करो

प्राप्तांक	1	2	3	4	5
परीक्षार्थियों की संख्या	10	14	25	16	5

हल

प्राप्तांक x	परीक्षार्थियों की संख्या (आवृत्ति) f	आवृत्ति मान $=f.x$	समानान्तर माध्यम $M=\frac{\sum f.x}{n}$
1	10	10	$M=\frac{202}{70}$
2	14	28	

3	25	75	= 2.88
4	16	64	
5	5	25	

$\sum f = n = 70$ $\sum fx = 202$

अतः प्राप्तांकों का सामान्तर माध्य= 2.88

उदाहरण–3 निम्न का माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
आवृत्ति	5	9	20	10	6

हल प्रत्यक्ष विधि

वर्ग अन्तराल	आवृत्ति f	वर्ग का मध्यमान	f.x	$M = \frac{\sum fx}{\sum f}$
0–10	5	= 5	25	$M = \frac{1280}{50}$
10–20	9	= 15	135	$= 25.6$
20–30	20	= 25	500	
30–40	10	= 35	350	
40–30	6	= 45	270	
	$= \sum f = 50$		$= \sum f = 1280$	

पाठगत प्रश्न –

1. वर्ग 30 से 40 का मध्य मूल ज्ञात कीजिए।
2. माध्य का अर्थ उदाहरण द्वारा स्पष्ट कीजिए।
3. निम्नलिखित आवृत्ति बंटन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
परीक्षार्थी	4	6	8	14	20	15	10	5	5	3

मध्यांक या माध्यिका –

माध्यिका का अर्थ है मध्य पद 'इसके लिये सर्वप्रथम दिये गये आकड़ों को आरेही या अवरोही क्रम. में लिखते है फिर मध्य पद को चुन लेते है यही माध्यिका है।'

यदि आंकड़ो की कुल संख्या (n) विषम हो तो मध्यिका पद का क्रमांक $=\frac{n+1}{2}$ होता है।

यदि आंकडों की कुल संख्या (n) सम हो तो मध्यिका पद क्रमांक $=\frac{2}{n}$ एवं $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ होंगे। अब दोनों पदों का माध्य मान ज्ञात करते हैं यही माध्यिका कहलाती है। माध्यिका $Md=\frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right.$ वे पद का मान $+\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वे पद का मान)

1 (a) असमूहीकृत आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात करना।

उदाहरण– 1.

8, 1, 4, 3, 5, 9, 11, 7, 13 की माध्यिका ज्ञात कीजिए

हलः दिये गये आंकड़ों को बढते क्रम में रखने पर

पद क्रमांक	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
	1	3	4	5	7	8	9	11	13

$\therefore n=9$ जो एक विषम संख्या है।

$\therefore$ माध्यिका पद का क्रमांक $\frac{n+1}{2}$

$=\frac{9+1}{2}$ वां

= 5 वां

माध्यिका = 5 वें पद का मान $(Md)=7$ उत्तर

उदाहरण 2 छः व्यक्तियों की मासिक आय क्रम में 3500 रू. 2700 रू., 4300रू. 5600 रू. एवं 2990 रू. है। माध्यिका ज्ञात कीजिए

हल– आय को बढ़ते क्रम में रखने पर

व्यक्ति क्रम	I	II	III	IV	V	VI
आय रूपयों में	2700	2900	3100	3500	4300	5600

$\therefore n = 6$ जो एक सम संख्या है।

मध्यिका $(Md) = \frac{1}{2}(\frac{n}{2}$ वें पद का मान $+\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वे पद का मान)

$\frac{1}{2}$ ($\frac{6}{2}$ वे पद का मान $+\left(\frac{6}{2}+1\right)$ वें पद का मान)

$\frac{1}{2}$(3 $\frac{1}{2}$ पद का मान + 4 थे पद का मान)

$\frac{1}{2}(3100+3500)$

अतः माध्यिका = 3300 रू.

<u>(b) असमूहीकृत बारम्बारता सारणी से माध्यिका ज्ञात करना</u>

– जबकि पदों की संख्या अधिक है।

उदाहरण– निम्नलिखित आवृत्ति बंटन का माध्यिका ज्ञात करो

प्राप्तांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
परीक्षार्थियों की संख्या	5	7	7	9	11	10	6	4	1	1

हल सबसे पहले दिये गये आंकड़ो की संचयी आवृत्ति (बारम्बारता) सारणी बनाते है।

प्राप्तांक X	परीक्षार्थियों की संख्या (आवृत्ति) f	संचयी बारम्बारता (आवृत्ति)
1	5	5
2	7	12
3	7	19
4	9	28
5	11	39
6	10	49
7	6	55
8	4	59
9	1	60
10	1	61

n = 61, जो विषय संख्या है।

अतः माध्यिका पद का क्रमांक $= \frac{n+1}{2}$

$$= \frac{61+1}{2}$$

$$= 31$$

चौथे प्राप्ताक की संचयी आवृत्ति 28 एवं पांचवे प्राप्तांक की संचयी आवृत्ति 39 है।

अतः परिक्षार्थी द्वारा प्राप्तांक 5 है।

अतः माध्यिका = 5 उत्तर

<u>जब आंकड़े वगीकृत (समूहीक) हों तो</u>

माध्यिका $= \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times I$

जहाँ $\ell_1 =$ माध्यिका वर्ग की निम्नसीमा

$N =$ पदों की संख्या

$F =$ माध्यिका वर्ग के पूर्व वर्ग की संचयी आवृत्ति

मध्यिका वर्ग

$f =$ ------"--------की मूल आवृत्ति

$I =$ वर्गान्तर

उदा.

वर्गन्तर	10–20	20–30	30–40	40–50
आवृत्ति	5	4	8	3

की माध्यिका ज्ञात करें।

हल

वर्गन्तर	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
10–20	5	5
20–30	4	9
30–40	8	17
40–50	3	20
50–60	5	25

यहाँ

$\ell_1 = 30$

$I = 40 - 30 = 10$

$F = 9$

$N = 25$

$f = 8$

$$\therefore \text{माध्यिका} = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} = F}{f} I$$

$$= 30 + \frac{\frac{25}{2} - 9}{8} \times 10$$

$$= 30 + \frac{3.5}{8} \times 10$$

$$= 30 + 4.37$$

$$= 34.37$$ उत्तर

पाठगत प्रश्न

आवृत्ति

1. निम्नांकित आवृत्ति सारणी का माध्यमान एवं माध्यिका क ज्ञात कीजिये

वर्गन्तार	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
आवृत्ति	6	8	10	7	6	4

2. प्रथम छः प्राकृत संख्याओं का मध्यमान ज्ञात कीजिये   उत्तर–3.5

3. एक टीम के खिलाड़ियों की ऊँचाई (सेंमी में) 153,146 148,150,156, है। उनकी औसत ऊँचाई ज्ञात करों

उत्तर – 150.6 सेंमी.

4. 18,37,24,59,4126,63,45,57,29 की माध्यिका ज्ञात कीजिये।   उत्तर– 39

सारांश

1. समंको का ग्राफीय निरूपण तुलनात्मक अध्ययन में काफी महत्वपूर्ण है।
2. ग्राफीय निरूपण में निर्देशांक का ज्ञान काफी महत्वपूर्ण है।
3. असमूहीकृत आंकडो का मध्यमान $= \dfrac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$
4. " " " माध्यिका $= \dfrac{n+1}{2}$ वां पद , जब n विषय है।
5. $= \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n}{2}\text{ वां पद} + \left(\dfrac{n}{2}+1\right)\text{ वां पद}\right]$ जब n सम है।
6. समूहीकृत आंकड़ों का मध्यमान $= \left[\dfrac{\sum fx}{\sum f}\right]$
7. $\dfrac{\text{समूहीकृत आंकड़ों की}}{\text{माध्यिका}} = \ell_1 + \dfrac{\dfrac{N-F}{2} \times I}{f}$

आत्म परीक्षण के प्रश्न

1. निर्देशांक को स्पष्ट कीजिये

2. ग्राफीक निरूपण के गुणा एवं दोष लिखिये

3. निम्नांकित आंकड़ां के लिये आयत चित्र बनाइये

ऊँचाई	130—136	136—142	142—148	148—154	154—160	160—166
छात्र. से	9	12	18	23	10	3

4. निम्नलिखित आंकड़ों की मध्यमान व मध्यांक ज्ञात कीजिये

(i) 15, 35, 18, 26, 19, 29, 25, 27, 20,

(ii) 78, 56, 54, 39, 68, 54, 84, 22, 34, 45

5. निम्न सारणी से मध्यमान एंव माध्यिका की संख्या कीजिये

65—85	85—105	105—125	125—145	145—165	165—185	185—205
5	4	13	20	14	8	4

6. निम्नलिखित क्रिक्रेट टीम द्वारा बनाए गए रनों के है उनकी माध्यिका ज्ञात कीजिए।

25 4 45 12 55 30 85 0 102 63 11

7. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए

चर	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
बारम्बरता	8	10	12	15	18	22	6	5	3	2	1

8. एक परीक्षा के 25 छात्रों के निम्नलिखित अंक प्राप्त किए। माध्यिका ज्ञात कीजिए।

35	38	37	24	33	48	32	33	50	21	47	5	38
27	45	26	38	48	44	30	52	49	40	42	44	

9. निम्नलिखित सारणी में आयु वर्षों मे दी हुई है। माध्यिका ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्षों में)	10	11	12	13	14	15
छात्रों की संख्या	6	8	10	7	3	12

इकाई – 8 सूचकांक –डी. एड./V/ 8

पत्राचार पाठ्यक्रम

माध्यमिक शिक्षा मंडल, म.प्र. भोपाल

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

विषय – गणित और उसका शिक्षण प्रश्न पत्र– पंचम पाठ् क्रमांक–8

विषयांश उपइकाई एक

गणित अध्यापन के उद्देश्य एवं विधियां

उपइाकई एक – गणित अध्यापन के उद्देश्य, गणित का पाठ्यक्रम में स्थान

उपइकाई दो – गणित में सहायक सामग्री का निर्माण

उपइकाई – तीन – गणित अध्यापन की विधियां

1. आगमन विधि
2. निगमन विधि

उपइकाई–चार – दक्षता आधारित शिक्षण

गणित संबंधी क्रीड़ा तथा प्रयोगशाला विधियां

इकाई सारांश

आत्म परीक्षण

प्रस्तावना

शैक्षिक प्रक्रिया के प्रमुख तीन घटक होते हैं –

<u>उद्देश्य, अध्यापन व सीखना तथा मूल्यांकनः–</u> अतः गणित विषय के प्रभावशाली शिक्षण के लिये उसके उद्देश्यों का ज्ञान अति आवश्यक है। इन उद्देश्यों का निर्धारण शिक्षा के सामान्य उद्देश्यों के आधार पर ही होता है। चुंकि शिक्षा का सामान्य उद्देश्य बालक के व्यक्तित्व का सर्वांगीण विकास करना है, ताकि वह एक सुशिक्षित एवं कुशल नागरिक बने। अतः गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य भी बालक का बौद्धिक, भावनात्मक एवं कौशलात्मक विकास करना है।

उपइकाई – एक

गणित–अध्यापन के उद्देश्य (AIMS)

गणित अध्यापन के प्रमुख उद्देश्य निम्नलिखित हैं –

1. वैज्ञानिक दृष्टिकोण का विकास – किसी भी वस्तु को क्या, क्यों और कैसे के झरोखे से देखने के दृष्टिकोण को वैज्ञानिक दृष्टिकोण कहा जाता है। समस्त वैज्ञानिक शोधों के निष्कर्ष गणित की सहायता से ही प्राप्त किए जाते हैं। वैज्ञानिक दृष्टिकोण उत्पन्न करना गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य है। अतः गणित का अध्यापन इस प्रकार करना चाहिए कि छात्रों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण उत्पन्न कर सकें एवं कौशल विकसित कर सकें।
2. व्यवहारिक उद्देश्य – हमारे दैनिक कार्यो में गणित का उपयोग होता है, जैसे – लेना–देना, नापना, तौलना, खरीदना, बेचना, लाभ–हानि आदि सभी में गणना करनी होती है। गणना के कौशल का विकास गणित के अध्यापन से किया जा सकता है। अतः गणित अध्यापन का यह व्यवहारिक उद्देश्य है कि छात्र अपने दैनिक जीवन के सभी गणना संबंधित कार्य कुशलता पूर्वक कर सके।
3. सांस्कृतिक उद्देश्य – मानव संस्कृति एवं सभ्यता के साथ–साथ निरंतर गणित का विकास भी हुआ है। वर्तमान सभ्यता व संस्कृति को अच्छी तरह से समझने के लिए हमें गणित के ज्ञान की आश्यकता होती है। कलात्मक दृष्टिकोण का विकास भी गणित शिक्षण द्वारा किया जा सकता हैं।
4. अनुशासनात्मक उद्देश्य – अनुशासनात्मक उद्देश्य का अर्थ विद्यार्थियों में मानसिक अनुशासन उत्पन्न करना है। गणित के अध्ययन से छात्र में तर्क–शक्ति का विकास एवं योजनाबद्ध व क्रमबद्ध रूप से कार्य करने के गुण का विकास होता है तथा इन्हीं गुणों के आधार पर अनुशासन उत्पन्न होता है। साथ ही गणित में कुशाग्रता लगातार एकाग्रचित होकर अभ्यास कार्य करते रहने से बढ़ती है। अतः गणित अध्यापन का एक मुख्य उद्देश्य है छात्र को अनुशासित बनाना ताकि वह अपने भावी जीवन को सफल बना सकें।
5. अवकाश के समय का सदुपयोग – छात्र के व्यक्तित्व के सर्वांगीण विकास में यह बात महत्वपूर्ण होती है कि वह अपना अवकाश का समय रचनात्मक कार्यों के माध्यम से व्यतीत करे ? गणित के रोचक प्रयोग इस हेतु सहायक सिद्ध होते हैं। अतः गणित अध्यापन का उद्देश्य यह भी है कि छात्र अपने अवकाश के समय का सदुपयोग करना सीखे।
6. मानसिक शक्तियों एवं चारित्रिक विकास का उदे्दश्य – गणित से विद्यार्थियों की विभिन्न मानसिक शक्तियों व योग्यताओं का विकास सहज व स्वभाविक ढंग से होता हैं। इससे विद्यार्थियों में तर्क, चिन्तन, निरीक्षण, विश्लेषण व सही निर्णय लेने की क्षमता का विकास होता है।

गणित के प्राप्य उद्‌देश्य –

गणित अध्यापन के प्राप्य उद्‌देश्य निम्नलिखित हैं–

1. ज्ञानात्मक उद्‌देश्य– छात्र गणित संबंधी पद, अवधारणाऐं, संकेत, परिभाषायें, सिद्धातों, सूत्रों आदि का ज्ञान प्राप्त कर सकें।
2. सही समझ या बोध संबंधी उद्‌देश्य – छात्र गणित संबंधी पद, अवधारणाओं, संकेत, परिभाषाओं सिद्धातों आदि में वर्णित बातों की सही समझ विकसित कर सके। अर्थात इनका ज्ञान अर्जित कर लेने पर वे उपयुक्त उदाहरण दे सकें, तुलना कर सके, वर्गीकरण, गणना, व्याख्या आदि कर सकें, ताकि उनके द्वारा अर्जित ज्ञान स्थायी बन सकें।
3. अनुप्रयोग उद्‌देश्य – छात्र गणित का ज्ञान एवं सही समझ अर्जित करके उसका उपयोग नवीन परिस्थितियों में कर सके, ज्ञान एवं बोध का उपयोग अज्ञात परिस्थितियों में कर सकें अर्थात वह आंकड़ो में संबंध स्थापित कर सके, उनकी आवश्यकता, आवश्यकता व पर्याप्तता ज्ञात कर सके, विश्लेषण व सामान्यीकरण कर सके व उचित निष्कर्ष ढूंढ सके इसके अलावा अन्य प्राप्य उद्‌देश्य है।
4. कौशल संबंधी
5. गणित विषय की सराहना करने संबंधी
6. गणित के प्रति रूचि उत्पन्न करने संबंधी

गणित का पाठ्यक्रम में स्थान

गणित आंकड़ों की एक चलती फिरती दुनिया का नाम है वह सतत गतिमान और विकासमान है। गणित ने हमें अंकों की ऐसी दुनिया से परिचित करवाया है जो आज पूरे विश्व की तरक्की की भाषा हैं। भूगोल हो या खगोल, सभी का विकास गणित के आधार पर ही हुआ है।

मनुष्य चाहे चन्द्रमा पर पहुंचा हो या मंगल ग्रह पर किसी जीव की खोज कर रहा हो– सारे कार्य गणित की गणनाओं के ही चमत्कार हैं। गणित का सम्पूर्ण विकास मनुष्य की मांगो का परिणाम ही हैं। सुई से लेकर जहाज तक का आविष्कार मनुष्य की आवश्यकताओं के आधार पर गणित गणनाओं ने ही किया।

वैदिक काल से ही भारत के गणित ने सभी संस्कृतियों को पीछे छोड़ दिया– चाहे वह बेबीलोनिया, चीन या तिब्बत की संस्कृति हो या पश्चिमी देशों की। शून्य का आविष्कार भारत में ही हुआ।

गणितज्ञों ने गणित को सम्राट से लेकर सेवक तक कहा है। इसे मानव संस्कृति का दर्पण भी कहा जाता है। कोठारी कमीशन की रिपोर्ट के अनुसार –

We can not over stress the importance of mathematics in relation to science education and research.

वेदांग ज्योतिष में भी गणित को वेदांग शास्त्रों में सर्वश्रेष्ठ कहा गया है।

पाठ्यक्रम में किसी भी विषय को स्थान देने के लिये निम्नलिखित तत्वों को ध्यान में रखा जाता है –

1. वह विषय व्यवहारिक जीवन में कितना उपयोगी है ?
2. इसका व्यावसायिक व सांस्कृतिक मूल्य क्या है ?
3. वह विषय कहां तक मानसिक अनुशासन तथा नैतिक मूल्य विकसित करने में सहायक हैं ?
4. वह विषय वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित करने में कितना उपयोगी है? इत्यादि। गणित विषय उपरोक्त सभी निर्धारक तत्वों की कसौटी पर सकारात्मक उतरता है। इसीलिए बालक की शिक्षा प्रारंभ करने के साथ पाठ्यक्रम में गणित को एक महत्वपूर्ण स्थान दिया गया है। इसके अतिरिक्त पाठ्यक्रम में गणित को एक महत्वपूर्ण स्थान देने के निम्नलिखित कारण हैं –
    1. गणित एक यथार्थ विज्ञान है।
    2. गणित तार्किक दृष्टिकोण पैदा करता है।
    3. गणित मानव जीवन से घनिष्ठता से जुड़ा है।
    4. गणित समस्त विषयों से आधारभूत तल पर जुड़ा है।
    5. गणित एक निश्चित सोच उत्पन्न करने का गुण विकसित करता है।

पाठ्यक्रम में गणित विषय का स्थान उपयोगिता की दृष्टि से भी महत्व रखता हैं।

जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में गणित की उपयोगिता है – नई खोज व अनुसंधानो में, बढ़ते हुये औद्योगिक क्षेत्रों में, जीवन की गुणवत्ता बढ़ाने में, उच्च से उच्च शिक्षा ग्रहण करने में आदि। श्री महावीराचार्य ने अपने ग्रंथ–गणित सार–संग्रह में लिखा है कि लौकिक, वैदिक तथा सामाजिक जो भी व्यवहार हैं उन सबमें गणित का उपयोग हैं।

गणित की मानसिक अनुशासन के विकास में बहुत उपयोगिता है क्योंकि क्रमबद्ध कार्य करना, तर्क करना, सही निर्णय लेना, सोचना, सत्यता को पररवना आदि मानसिक विकास के कार्य गणित में ज्यादा निहित है।

गणित की सांस्कृतिक एवं व्यावसायिक उपयोगिता भी बहुत है– जैसे ईमानदारी, निष्पक्षता, समानता, नियमबद्धता आदि गुण गणित के अध्ययन से विकसित होते हैं – तथा अर्थमिति के सिद्धान्तों का आधार गणित है।

गणित सत्य से जुड़ा है। अतः यह शिवतत्व व सौन्दर्य से भी अलग नहीं हैं। गणित के महत्व को स्वीकारते हुये नेपालियन ने कहा था –

The progress and improvement of mathematics is linked to prosperity of the state.

इस प्रकार हम देखते हैं कि पाठ्यक्रम में गणित विषय का महत्वपूर्ण स्थान है, वही जो हमारे शरीर में प्राण का।

पाठगत प्रश्न –

1. गणित अध्यापन का मुख्य उद्देश्य क्या है?

2. गणित का पाठ्यक्रम में क्या स्थान है ?

3. अवकाश का सदुपयोग गणित से किस प्रकार सम्भव है।

उपइकाई–दो

गणित में शिक्षण सहायक सामग्री का निर्माण एवं उपयोग

गणित में कई अवधारणायें अमूर्त होती हैं इसके कारण प्रायः देखा गया है कि छात्रों को गणित विषय कम रूचिकर, जटिल व बोझिल लगता है। किन्तु सहायक सामग्री की सहायता से गणित शिक्षक को अधिक रोचक, अधिक सहज एवं अर्थपूर्ण बनाया जा सकता है।

महान शिक्षाविद रूसो, पेस्टालाजी, फ्रीबेल एवं मान्तेसरी ने भी शिक्षण में सहायक सामग्री के उपयोग की आवश्यकता बताई है। कॉडवेल कुक के अनुसार –

Effectiveness of learning lines not in reading and lisening but in action, performance and experience.

प्रारंभिक स्तर पर गणित शिक्षण के उद्देश्यों की प्राप्ति सहायक सामग्री के उपयोग द्वारा ही सम्भव हो सकती है। जैसे गणितीय कौशलों का विकास, गणना करना, आलेखन करना, मापन, चार्ट आदि को पढ़कर समझना आदि करने से ही सीखे जा सकते हैं। इसके लिये चार्ट, चित्र मॉडल्स, फलेनल बोर्ड, जियो–बोर्ड इत्यादि का उपयोग किया जाना चाहिए।

कहते हैं पढ़ाने से अधिक सीखने–सिखाने पर अधिक बल देना चाहिए।

हर्बल स्पेन्सर के अनुसार –

शिक्षण में छात्रों को जितना कम से कम हो बताया जाये और उनको जितना अधिक से अधिक हो खोजने के लिये प्रोत्साहित किया जाये।

सहायक सामग्री का उपयोग – गणित के शिक्षण को अधिक रोचक व प्रभावशाली बनाता हैं।

सीखने की प्रक्रिया में सीखने वाले की सहभागिता अधिक से अधिक होनी चाहिए। अतः गणित विषय को क्रियाकलाप आधारित छात्र केन्द्रित उपागम से ही सिखाना चाहिए। जिसमें शिक्षक पूर्व में ही आवश्यक अधिगम सहायक सामग्री एकत्र करके सीखने को उपयुक्त वातावरण बना सकता है। इस वातावरण में छात्र समूहों में सहायक सामग्री की सहायता से क्रियाकला करते हैं तथा शिक्षक की भूमिका एक सुविधादाता की होती है। जिसके मार्गदर्शन में छात्र स्व–अध्ययन द्वारा सीखते हैं। इस प्रकार गणित के शिक्षण को रोचक व आनन्ददायक बनाया जा सकता है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 86 में भी कहा गया है कि गणित के बहुत से सिद्धांत करने से सीखे जा सकते है। इसके लिये शाला में एक गणित प्रयोगशाला या कम से कम एक गणित कार्नर अवश्य बनाया जाये, जहां पर गणित की सहायक सामग्री व्यवस्थित रखी जाये। इस हेतु गणित किट की सामग्री का उपयोग अवश्य किया जाना चाहिए। इस किट में निम्नलिखित सहायक अधिगम सामग्री होती है –

1. भिन्न–चकती
2. नेपियर पट्टिकाएं
3. गिनतारा
4. डोमिनोज
5. कुजनेपर पट्टिकाएं
6. घनाकार छडें तथा
7. सुड़ौल ठोस

गणित कार्नर

इस गणित कार्नर में शिक्षक सस्ती, सुलभ सामग्री द्वारा निर्मित या कबाड़ से जुगाड़ वाली सामग्री एकत्र करके रख सकता है। जैसे– संख्या रेखा का माडल, धन पूर्णांक ऋणपूर्णांक, जोड़ना, घटाना तथा अपरिमेय संख्याओं का ज्ञान देने हेतु 1 पेपर फोल्डिंग द्वारा सर्वांगसमता, समरूपता सममिति के अलावा समकोण, न्यूनकोण, अधिककोण, पुनर्युक्त कोण एवं समबहुभुजीय आकृतियों की अवधारणा स्पष्ट की जा सकती है। इसके लिये माचिस के खाली खोले, सीकं, बाल्ट, ट्यूब आदि भी उपयोग किये जा सकते हैं। बांस के एक सुडौल टुकड़े से खोखले बेलन नापा लकड़ी के एक घनाकार टुकड़े से घन के बारे में दिखाया जा सकता है कि घन में छः वर्गाकार सतहें, आठ शीर्ष तथा बारह किनारे होते है।

ज्यामिति पढ़ाने में ज्यामिति बाक्स का उपयोग किया जाना नितान्त आवश्यक हैं।

इसके अलावा कई आधुनिक सहायक सामग्री भी गणित सिखाने हेतु उपयोग में लाई जा सकती हैं।

इस प्रकार सहायक अधिगम सामग्री का उपयोग करके शिक्षक छात्रों में गणित विषय के प्रति रूचि बढ़ा सकता है तथा गणित की जटिलता को सहजता में बदलकर गणित अध्यापन व सीखने को आनन्ददायक बना सकता है।

उपइकाई–तीन

गणित के अध्यापन की विधियां

गणित शिक्षण के दौरान प्रायः यह समस्या आती है कि यदि एक विधि द्वारा पढ़ाने पर हमारे विद्यार्थी नहीं सीख पर रहे हैं तो हम अन्य कौन सी विधि अपनाएं जिससे प्रभावी अध्यापन हो सके। इसके लिये हमें शिक्षण विधियों का स्पष्ट ज्ञान होना अत्यन्त आवश्यक है। शिक्षण विधियां शिक्षण सूत्रों पर आधारित होती हैं। गणित में सामान्यतः निम्नांकित शिक्षण सूत्रों को प्रयोग करते है–

1. ज्ञात से अज्ञात की ओर
2. स्थूल से सूक्ष्म की ओर
3. सरल से कठिन की ओर
4. अनिश्चित से निश्चित की ओर

5. पूर्ण से अंश कीओर
6. प्रत्यक्ष से अप्रत्यक्ष की ओर
7. विश्लेषण से संश्लेषण की ओर
8. विशिष्ट से सामान्य की ओर
9. मनोवैज्ञानिक से तार्किक क्रम की ओर

शिक्षण विधियां अध्यापक और विद्यार्थियों के परस्परिक संबंधों में सजीवता लाती है। यह विधियां बालकों के मस्तिष्क के साथ–साथ उनके सम्पूर्ण व्यक्तित्व, भावना, मूल्यों तथा मनोवृत्तियों पर भी प्रभाव डालती है, शिक्षण विधि द्वारा बालकों में आत्मनिर्भरता, आत्मविश्वास, विभिन्न दक्षताएं विकसित होती हैं।

अधिकतर विद्यार्थी गणित विषय में अपेक्षाकृत कम रूचि लेते हैं। इसका मुख्य कारण शिक्षण हेतु उपयुक्त विधियों का प्रयोग न होना है। गणित पढ़ाने के भिन्न–भिन्न स्तरों पर भिन्न विधियों का प्रयोग करना होता हैं। किसी एक विधि द्वारा संपूर्ण विषय का शिक्षण नहीं किया जा सकता है।

आगमन विधि – गणित अध्यापन हेतु आगमन विधि बहुत ही उपयुक्त है। जोसेफ लेन्डन के शब्दों में ''जब कभी हम बालकों के समक्ष बहुत से तथ्य, उदाहरण या वस्तुएं प्रस्तुत करते हैं और फिर उनसे स्वयं के निष्कर्ष निकलवाने का प्रयास करते हैं तब हम शिक्षण की आगमन विधि का प्रयोग करते हैं।''

इस विधि में कुछ उदाहरणों या तथ्यों को छात्रों के सम्मुख प्रस्तुत करके सामान्य नियम निकलवाया जाता हैं। छात्र स्वयं गणित के तथ्य सिद्धान्त या नियमों तक निरीक्षण तुलना या वर्गीकरण करके सामान्यीकरण द्वारा पहुंचते हैं।

आगमन विधि में शिक्षण के तीन सूत्रों का उपयोग किया जाता हैं –

1. ज्ञात से अज्ञात की ओर
2. विशिष्ट से सामान्य की ओर
3. स्थूल से सूक्ष्म की ओर

आगमन विधि के निम्नलिखित चरण होते है–

1. उदाहरण – छात्रों के सम्मुख एक ही प्रकार के कई उदाहरण प्रस्तुत किये जाते हैं।
2. निरीक्षण– इसमें छात्रों से उदाहरणों का विश्लेषण, तुलना आदि द्वारा निरीक्षण करके किसी निष्कर्ष पर पहुंचने का प्रयास किया जाता हैं।
3. सामान्यीकरण – छात्र उदाहरणों के आधार पर किसी सामान्य नियम का निर्धारण करते हैं।

4. परीक्षण – अंत में छात्र अन्य उदाहरणों की सहायता से निकाले गये नियम का सत्यापन कर पुष्टि करते हैं

आगमन विधि के गुण –

1. स्वाभाविक ढंग से छात्र द्वारा ज्ञान अर्जित करने की यह मनोवैज्ञानिक विधि है।
2. यह विधि प्रत्यक्ष तथ्यों पर आधारित है। अतः पूर्णतः वैज्ञानिक है।
3. ज्ञात से अज्ञात की ओर या स्थूल से सूक्ष्म की ओर बढ़ने के कारण यह विधि रोचक व आनंददायक है।
4. इस विधि में छात्र स्वयं प्रयास, परिश्रम व खोज करके प्रभावकारी ढंग से गणित सीखते हैं।
5. इस विधि द्वारा छात्र को गणित सीखने की प्रेरणा मिलती है व उसकी सृजनात्मकता को प्रोत्साहन मिलता है। फलतः इसमें आत्मविश्वास बढ़ता है जो गणित के लिये आवश्यक है।

आगमन विधि की सीमायें –

1. यह विधि धीमी व दीर्घ कालिक हैं।
2. कभी–कभी बालक त्रुटिपूर्ण नियम या तथ्य को खोज लेते हैं।
3. गणित की सभी अवधारणायें इस विधि द्वारा नही सिखाई जा सकती है।
4. यह विधि अपने आप में पूर्ण नहीं है क्योंकि यह बालक को यह नहीं बताती कि नियम को निर्धारित करने के लिये उसे अनिवार्यतः निगमन विधि को अपनाना पड़ता है।
5. लेन्डन के अनुसार यह विधि परीक्षा के दृष्टिकोण से उत्तम परिणाम प्राप्त करने के लिये लाभदायक नहीं है।

फिर भी इस विधि के गुण उसके दोषों की तुलना में अधिक है। विशेषतः प्रारम्भिक कक्षाओं में गणित के शिक्षण में यह अधिक उपयोगी है।

निगमन विधि –

जोसेफ लेन्डन के अनुसार ' निगमन विधि द्वारा शिक्षण में पहले परिभाषा या नियम सिखाया जाता है, तत्पश्चात् उसके अर्थ का सावधानी से स्पष्टीकरण किया जाता है और अन्त में तथ्यों का प्रयोग करके उसे पूर्णतः स्पष्ट किया जाता हैं।

निगमन विधि आगमन विधि के ठीक विपरीत है इसमें मुख्य रूप से 3 शिक्षण सूत्रों का प्रयोग किया जाता है –

1. सूक्ष्म से स्थूल की ओर
2. सामान्य से विशिष्ट की ओर
3. नियम से उदाहरण की ओर

निगमन विधि में निम्नलिखित चरण होते हैं –

1. नियम या सिद्धांत का प्रस्तुतीकरण – सर्वप्रथम शिक्षक छात्रों को नियम या सिद्धांत बताते हैं।
2. प्रयोग या उदाहरण – छात्रों को बताए गए नियम की सत्यता सिद्ध करने हेतु शिक्षक कुछ उदाहरण प्रस्तुत करते है या प्रयोग करते हैं।
3. निष्कर्ष – छात्र उदाहरणों के आधार पर निष्कर्ष निकालते हैं।
4. परीक्षण – अंत में छात्र उदाहरणों द्वारा निकले निष्कर्ष की सत्यता का परीक्षण करते है।

उदाहरण –

1. 101 का वर्ग ज्ञात करो – इसके लिये निम्नलिखित सूत्रों का उपयोग करेंगे

   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसका आधार $BC = 7.5$ सेंमी तथा उंचाई $BC = 7.5$ सेंमी हैं। छात्र इस प्रश्न को हल करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करेंगे –

   Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ उंचाई

इस प्रकार निगमन विधि में छात्र सीधे सूत्र का प्रयोग करके प्रश्नों को हल करते है।

निगमन विधि की विशेषतायें –

1. यह विधि संक्षिप्त व उपयुक्त है।
2. इसमें छात्र को नियम, सिद्धांत आदि की खोज नहीं करना पड़ती है।
3. इसमें समय की बचत होती है तथा शिक्षक का कार्य आसान हो जाता हैं।

निगमन विधि के दोष –

1. इस विधि से अर्जित ज्ञान स्थायी नहीं होता।

2. यह विधि *Telling Method* की तरह है। अतः यह रटने–रटाने को प्रोत्साहन देती है।
3. इसमें छात्र को स्वयं सीखने का अवसर नहीं मिलता।
4. मनोविज्ञान की दृष्टि से यह विधि प्रभावकारी नहीं है क्योंकि यह सूक्ष्म से स्थूल की ओर बढ़ती है।
5. इसमें सम्पूर्ण सीखने की प्रक्रिया स्थूल रहती है, इससे अध्ययन के बाद भी छात्र में आत्मविश्वास की कमी बनी रहती है।

रायबर्न के अनुसार 'आगमन के पश्चात् निगमन विधि का प्रयोग करना चाहिए– छात्रों द्वारा विशिष्ट उदाहरणों द्वारा सामान्य परिणाम आगमन विधि द्वारा निकाल लेने के उपरांत अपने ज्ञान में वृद्धि करने और नियमों का परीक्षण करने के लिये निगमन विधि का भी प्रयोग करना चाहिए।

आगमन – निगमन विधियों को विश्लेषण–संश्लेषण विधियों के समान ही माना गया है– जोसेफ लेन्डन के अनुसार The two methods of analysis and synthesis correspond closely to those of induction and deduction.

क्रीडा विधि – (Play-way Methods)

Play is the natural method by which very young children learn.

Hughes and Hughes

खेल में बालक की स्वाभाविक रूचि होती है खेल द्वारा वह अपनी रूचियों, इच्छाओं, मनोवृत्तियों और अभिवृत्तियों को व्यक्त करता है।

बालक के जीवन में खेल के इसी महत्व के कारण क्रीड़ा विधि का आविष्कार हुआ। महान शिक्षा शास्त्री फॉबेल इस विधि के जनक हैं किन्तु हेनरी काल्डवेल कुक सम्भवतः पहला व्यक्ति था जिसने बालक को शिक्षा देने के लिये क्रीड़ा विधि का प्रबल समर्थन किया, उनके अनुसार मेरा दृढ विश्वास है कि केवल वही कार्य करने योग्य है, जो वास्तव में खेल है क्योंकि खेल से मेरा अभिप्राय किसी कार्य को पूर्ण ह्र्दय से करना है।

क्रीड़ाविधि वह विधि है जो बालक को उसी उत्साह से सीखने की क्षमता देती है, जो उसके स्वभाविक खेल में पाई जाती है।

विशेषताएं

1. क्रीड़ा विधि से गणित – शिक्षण अधिक रोचक एवं मनोरंजक होता है। इस विधि में शिक्षण शब्द के स्थान पर सीखने में सुविधादाता शब्द अधिक उपयुक्त होता है।
2. यह विधि बाल केन्द्रित होती है– बालक गणितीय अवधारणाओं को क्रीड़ा द्वारा सीखता है। इसमें सुविधादाता (शिक्षक) गणित सीखने का वातावरण (गणितीय खेल) का निर्माण छात्रों की रूचि, क्षमता, आयु व रूझान के अनुसार करता है। जिसमें छात्र अपनी पूर्ण क्षमता से खेल–खेल में गणित सीखते हैं।
3. यह विधि बालक की शारीरिक, मानसिक, सामाजिक और आध्यात्मिक शक्तियों का विकास करके इसके व्यक्तित्व को संतुलित करती हैं।

सीमाएं –

1. प्रारंभिक स्तर पर यह विधि उपयोगी है किन्तु गणित की प्रत्येक विषयवस्तु इस विधि से पढ़ाई जाना कठिन है।
2. इस विधि को क्रियान्वित करने में शिक्षक को अधिक परिश्रम व सामग्री की आवश्यकता होती है।

4. प्रयोगशाला विधि

प्रयोगशाला विधि में छात्र गणित के तथ्यों की खोज प्रयोगशाला में करते हैं। इस विधि से खोज प्रश्नों के आधार पर न होकर प्रयोगों द्वारा की जाती है। इस विधि का प्रमुख उद्देश्य छात्रों में अनुसंधान प्रवृत्ति का विकास करना है। छात्र प्रयोगशाला में जाकर मापन करते हैं, भार ज्ञात करते हैं और स्वयं निरीक्षण करके निष्कर्ष निकालते हैं। प्रयोगशाला विधि का अर्थ है कि छात्रों को इस प्रकार सिखाया जाना चाहिए कि छात्र को स्वयं प्रयोग करने तथा निरीक्षण का असवर मिले।

विज्ञान की प्रयोगशाला के समान गणित की भी एक प्रयोगशाला होती है, प्रयोगशाला जिसमें रेखागणित के औजार, ज्यामिति की शक्लों के मॉडल, गोला, प्रिज्म, चार्ट,गत्ता,शीशा, ड्राइंग बोर्ड आदि रखे रहते हैं। गणित प्रयोगशाला में छात्र स्वयं गणित के नियम, सिद्धांत आदि के प्रयोग व निरीक्षण कर अपने निष्कर्ष स्वयं गणना करके ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ – छात्र स्वयं एक आयताकार ठोस (धनाम) की लम्बाई, चौड़ाई व ऊंचाई स्केल से नाप सकते हैं तथा उसके सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल एवं उसके आयतन की गणना स्वयं कर सकते हैं।

प्रयोगशाला विधि की विशेषतायें :–

1. प्रयोगशाला विधि '' करो और सीखो'' स्थूल से सूक्ष्म की ओर '' आदि शिक्षण सिद्धांतों के अनुकूल है।
2. इस विधि में बालक अपनी अधिक से अधिक ज्ञानेन्द्रियों का प्रयोग करके ज्ञान प्राप्त करता है। अतः इस विधि द्वारा अर्जित ज्ञान स्थायी होता है।

3. प्रयोग को भली भांति करने में ईमानदारी, कौशल, सत्यता आदि गुणों का विकास होता है। साथ ही स्वयं परिश्रम करने की आदत एवं आत्मविश्वास का भी विकास होता है।
4. यह विधि मनोवैज्ञानिक, वैज्ञानिक, व्यवहारिक एवं जीवनोपयोगी है।
5. इस विधि में छात्रों को समूहों में भी कार्य करना पड़ता है। अतः उनमें सहयोग की भावना का विकास होता है तथा अनुशासन जैसे व्यक्तित्व विकास के गुणों में वृद्धि होती है।

सीमायें –

1. यह विधि अधिक व्ययपूर्ण है। जिसमें प्रयोशाला के लिये अतिरिक्त स्थान के साथ–साथ साम्रगी जुटाना भी कठिन होता है।
2. प्रारंभिक स्तर पर छात्र स्वयं प्रयोग करने में असमर्थ होते हैं।
3. प्रयोग करने में छात्र के ज्ञान व कौशल का विकास तो होता है किंतु अन्य क्षमताओं (तर्कशक्ति आदि) का विकास नहीं हो पाता।
4. इस विधि में भी अधिक समय खर्च होता है।
5. गणित की पाठ्यपुस्तक में भी प्रयोगशाला विधि के आधार पर पाठ्यांश नहीं होते है न ही कोई Laboratory Mannual उपलब्ध है।

पाठगत् प्रश्न :–

4. गणित अध्यापन के लिये सहायक सामग्री का नाम बताइये।
5. गणित अध्यापन की दो विधियों के नाम बताइये।
6. क्रीड़ा विधेकी एक विशेषता बताइये।

उपइकाई – चार

दक्षता आधारित शिक्षण –

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 1986 में निम्नलिखित दो बातों की सिफारिश प्राथमिक शिक्षा के संदर्भ में की गई है–

1. विद्यालय के अनाकर्षक परिवेश, भवनों की असंतोषजनक दशा और शिक्षण सामग्री के अभाव की दृष्टि में सुधार तथा
2. उन न्यूनतम अधिगम स्तरों का निर्धारण, जिनकी विभिन्न शिक्षा स्तरों को पूरा करने वाले सभी छात्रों को संप्राप्ति होनी चाहिए।

दक्षता आधारित शिक्षण इस दूसरी सिफारिश से जुड़ी हैं – प्रत्येक शिक्षा स्तर की समाप्ति पर बालक को सीख लेना चाहिए था, इसकी ठीक–ठीक परीभाषा ही दक्षता है। दक्षता का उल्लेख उन अपेक्षित

अधिगम प्रतिफलों के रूप में किया जा सकता है जो प्रेक्षणीय अन्तिम व्यवहार के रूप में परिभाषित किये गये हैं। न्यूनतम अधिगम स्तरों को उन अधिगम दक्षताओं के रूप में भी निरूपित किया जा सकता है जिनमें किसी विशेष कक्षा या शिक्षा स्तर के अंत में प्रत्येक बालक द्वारा पूर्ण दक्षता की प्राप्ति अपेक्षित है।

अधिगम लक्ष्यों का वर्गीकृत विश्लेषण भी किया जा सकता है जैसे–ज्ञान, बोध, अनुप्रयोग, विश्लेषण, संश्लेषण, मूल्यांकन आदि।

प्रत्येक विषय वस्तु या अधिगम क्षेत्रों को दक्षता तथा उपदक्षता के रूप में निरूपित किया जा सकता है।

बोझिल पाठ्यक्रम प्रायः शिक्षक को अध्ययन–अध्यापन प्रक्रिया के कुछ बुनियादी सिद्धान्तों की पूर्णतः अवहेलना (उपेक्षा) करने के लिये बाध्य करता है। पाठ्यक्रम को पूरा करना इतना अधिक महत्वपूर्ण हो जाता है कि कक्षा में सभी बच्चों की सीखने की गति की अवहेलना होती है।

शिक्षक पिछड़े बच्चों, उपचारी शिक्षण, प्रयोग, अन्वेषण, निरीक्षण या कार्यकलाप आधारित अधिगम की उपेक्षा के लिये बाध्य हो जाता है।

दक्षता आधारित शिक्षण '' द्वारा शिक्षक को उक्त स्थिति से मुक्ति मिल सकती है, इसलिये न्यूनतम अधिगम स्तर आधारित (दक्षता आधारित) शिक्षण हेतु शिक्षक को अपने पाठ्यचर्या को संशोधित करके अधिक प्रासगिक व क्रियाशील बनाना चाहिए।

इस कार्य के निहितार्थ प्रस्तुत हैं –

1. पाठ्यचर्या में पाठ्–भार और अनावश्यक एवं प्रासंगिक तथ्यों को याद करने के भार को कम करना।
2. ऐसे अवसरों की खोज करना जिससे पाठ्यपुस्तकीय सूचना को वस्तुनिष्ठ वास्तविक्ता से जोड़कर व अनुप्रयोग की प्रक्रिया को अधिक अर्थपूर्ण बनाया जा सके।
3. आधारभूत दक्षताओं की प्राप्ति को ऐसे स्तर तक सुनिश्चित करना जहां वे स्थिर रखी जा सके।
4. पूर्ण दक्षता युक्त अधिगम की उपलब्धि के अवसर केवल तेजस्वी बच्चों को ही नहीं बल्कि लगभग सभी बच्चों को प्रदान करना जिनमें प्रथम पीढ़ी के शिक्षार्थी शामिल हो।

दक्षताओं की कुछ आधारभूत विशेषतायें :–

दक्षताअें के विशिष्टीकरण से अधिगम उपलब्धि में वृद्धि होनी चाहिए इसके लिये दक्षतायें केवल प्रासंगिक तथा कार्यात्मक ही नहीं बल्कि सम्प्राप्य, बोधगम्य व मूल्यांकन योग्य भी होनी चाहिए।

1. संम्प्राप्य – दक्षताओं की एक आधारभूत विशेषता यह होनी चाहिए कि वह उन अधिगम लक्ष्यों के अनुरूप होनी चाहिए कि वह उन अधिगम लक्ष्यों के अनुरूप हो जिनकी सप्राप्ति सभी बालकों द्वारा सम्भव हो।
2. संप्रेषणीयता – दक्षता यथार्थवादी तथा संप्राप्य होना ही पर्याप्त नहीं है – उतना ही महत्वपूर्ण यह है कि उनको ऐसी भाषा व रूप में तैयार किया जाये, जिससे वे सभी के लिये सरलता से बोधगम्य हों, क्योंकि इनका संबंध बालक के शैक्षिक विकास से है।
3. मूल्यांकनीयता – दक्षताओं का सरलता पूर्वक मूल्यांकन योग्य शब्दों में उल्लेख करने से बालक को एक इकाई से दूसरी इकाई तक जाते समय पूर्णदक्षता प्राप्त करने में सहायता मिलनी चाहिए।
4. अभिगम सांतत्यक – अधिगम को एक सांतत्यक के रूप में देख ागया है जिसमें इकाईयों को सोपान रूप में इस प्रकार क्रमित किया गया है कि एक इकाई के दक्षता समूह का निर्माण पिछले एकक की दक्षताओं पर अधिक से अधिक प्रत्यक्ष रूप में आधारित होता है

यह बात सुनिश्चित है कि यदि बालक प्रत्येक अगले एकक की ओर बढ़ने से पूर्व पिछले एकक की संबद्ध दक्षताओं पर अधिकार प्राप्त कर लेवे तभी प्रत्येक परवर्ती एकक सीखने में अधिक आनंददायक व अर्थपूर्ण होगा तथा दक्षताओं की संप्राप्ति अधिक सरल होगी।

गणित की आधारभूत दक्षताओं को इसलिये सूचीबद्ध किया जाना चाहिए ताकि प्रत्ययों और कौशलों को इनमें शामिल किया जा सके। इससे बालक को क्रियात्मक गणित में एक न्यूनतम स्तर तक पहुंचने में सहायता मिल सकेगी।

इन दक्षताओं में प्रवीणता, बालक की अपने वर्तमान एवं भावी जीवन की समस्याओं के समाधान हेतु गणितीय प्रत्ययों व कौशलों का प्रयोग करने में सहायता करेगी।

प्रत्येक कक्षा में अधिगम क्षेत्रों की सूची बनाकर प्रत्येक अधिगम क्षेत्र को दक्षताओं में बांटकर इन्हें भी सूचीबद्ध किया है।

गणित में न्यूनतम अधिगम आधारित दक्षताओं की सूची –

स्तर	दक्षता	कक्षा–2	कक्षा–3	कक्षा–4	कक्षा –5
1.	संख्या स्थानीयमान विस्तारित रूप	100 तक की संख्यायें	100 तक की संख्यायें	1000 तक की संख्यायें	10,000 तक की संख्यायें
2.	जोड़ना	एक अंक का एक	दो अंकों की संख्या का	तीन अंकों की संख्या	चार अंकों की संख्या

		अंक में जोड़	जोड़	का जोड़	का जोड़
3.	घटाना	20 तक की संख्या घटाना (एक अंक की)	दो अंकों की संख्या घटाना	तीन अंकों की संख्या का घटाना	चार अंकों की संख्या का घटाना
4.	गुणा		2 से 10 तक के पहाड़े , दो अंकों की संख्या में एक अंक की संख्या में गुणा	10 तक के पहाड़े दो या तीन अंकों की संख्या में एक अंक की संख्या से गुणा	20 तक पहाड़े और दो या तीन अंकों की संख्या में दो अंकों की संख्या से गुणा
5.	भाग			तीन अंकों की संख्या में एक अंक की संख्या का भाग देना	तीन अंकों की संख्या में दो अंकों की संख्या से भाग देना
6.	भिन्न नियम			भिन्न	भिन्न
7.	एकक नियम			एकिक नियम	एकिक नियम

इकाई सरांश

- गणित अध्यापन के उद्देश्य
- वैज्ञानिक दृष्टिकोण का विकास करना
- दैनिक कार्यों में गणित का उपयोग करना
- कलात्मक दृष्टिकोण का विकास करना
- मानसिक अनुशासन उत्पन्न करना

- अवकाश के समय का सदुपयोग करना
- मानसिक शक्तियों एवं चारित्रिक विकास करना
- गणित का पाठ्यक्रम में महत्वपूर्ण स्थान है।
- सहायक सामग्री का उपयोग करके गणित शिक्षण को अधिक रोचक व प्रभावशाली बनाया जा सकता है।
- गणित अध्यापन की विधियां

  – आगमन विधि

  – निगमन विधि

  – क्रीड़ा विधि

  – प्रयोगशाला विधि
- दक्षता आधारित शिक्षण से छात्रों में अपेक्षित दक्षतायें प्राप्त की जा सकती है।

आत्म परीक्षण

1. गणित अध्यापन के उद्देश्य बताइये ?
2. पाठ्यक्रम में गणित विषय के महत्व पर अपना अभिमत दीजिये।
3. गणित शिक्षण के प्राथमिक शिक्षा के संदर्भ में – सहायक अधिगम सामग्री का क्या महत्व है?
4. गणित अध्यापन की आगमन–निगमन विधियों की विशेषतायें लिखिये। तथा सिद्ध कीजिये की दोनों विधियां एक दूसरे की पूरक है।
5. दक्षता आधारित शिक्षण की उपयोगिता लिखिये।
6. गणित की प्रयोगशाला विधि की विशेषतायें एवं सीमायें लिखिये।

गतिविधियां एवं नियम कार्य –

1. गणित का पाठ्यक्रम में महत्वपूर्ण स्थान है विषय पर अपने साथियों से चर्चा कीजिये।
2. गणित अध्यापन की अन्य विधियों से संबंधित साहित्य का अध्ययन कीजिये।

चर्चा तथा स्पष्टीकरण के बिन्दु –

चर्चा के बिन्दु

....

स्पष्टीकरण के बिन्दु

....

ईकाई – 9 सूचकांक –डी. एड./V/ 9

पत्राचार पाठ्यक्रम

माध्यमिक शिक्षा मंडल, म.प्र. भोपाल

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

विषय – गणित और उसका शिक्षण प्रश्न पत्र– पंचम पाठ् क्रमांक–9

विषयांश उपइकाई एक

उपइकाई – एक

1. गणितीय दक्षताएं
2. पाठ योजना
3. दक्षता आधारित मूल्यांकन
4. गणित में मूल्यांकन के उद्देश्य
5. मूल्यांकन का रिकार्ड रखना
6. मूल्यांकन की विशेषताएं

उपइकाई –दो

1. आकलन एवं उसकी संकल्पना
2. आकलन का महत्व
3. आकलन के प्रकार
4. आकलन की विशेषताएं
5. आकलन का उद्देश्य

उपइकाई–तीन

1. कठिनाइयों का निदान
2. कठिनाइयों के निराकरण हेतु अध्यापन

उपइकाई – चार

1. गणित में सृजनात्मकता
2. सृजनात्मक विद्यार्थी के गुण
3. शिक्षक की भूमिका

उपइकाई – पांच

1. गणित के संदर्भ में बाल केन्द्रित तथा क्रियाकलाप पर आधारित शिक्षण
2. गणित के प्रश्नपत्र का ब्लूप्रिंट बनाकर प्रश्न पत्र बनाना।
3. प्रश्नपत्र का आदर्श उत्तर व क्रमवार अंकों का विभाजन
4. परीक्षाफल का विश्लेषण कर निदानात्मक उपचार

इकाई सांराश

आत्म परीक्षण

प्रस्तावना – इस इकाई में हम गणितीय दक्षताएं, एवं उसका मूल्यांकन, आकलन एवं उसकी संकल्पना, महत्व प्रकार विशेषतायें और उपयोग, गणित शिक्षण में कठिनाइयों का निदान एवं निराकरण , गणित शिक्षण से सृजनात्मकता और गणित के संदर्भ में बाल केन्द्रित तथा क्रियाकलापों पर आधारित शिक्षण का अध्ययन करेंगे। साथ ही गणित में ब्लूप्रिंट बनाकर प्रश्नपत्र बनाना, प्रश्नपत्र के आदर्श उत्तर एवं उनके क्रमवार अंकों का विभाजन सीखेंगे।परीक्षा फल का विश्लेषण कर निदानात्मक उपचार का अध्ययन करेंगे।

उपइकाई –एक

1. गणितीय दक्षताएँ

गणित का मुख्य उद्देश्य बालकों में विभिन्न दक्षताओं का विकास करना है। ये दक्षताएँ निम्न हो सकती है–

1. ज्ञानात्मक दक्षता– बालक गणित से संबंधित विभिन्न प्रकार की जानकारी प्राप्त करता है। जैसे संख्याओं का बोलना, पहिचान करना, संख्याओं का ज्ञान, प्रतिशत, ब्याज आदि का ज्ञान।

2. बोधात्मक दक्षताएँ– बालक में गणित के सिध्दान्तों एवं उनके अनुप्रयोगों के बारे में समझ विकसित होती है वह उन्हें आत्मसात कर लेता है। यथा जोड़ना, घटाना, भाग देना आदि ।

3. कौशलात्मक दक्षता– गणित से सम्बंधित जो भी ज्ञान बालक ने प्राप्त किया है। उनका अनुप्रयोग विभिन्न परिस्थितियों में करता है।

कौशलात्मक दक्षता में निम्नलिखित कौशलों का विकास आवश्यक है–

(1) संख्यात्मक कौशल– वस्तुओं को गिनना, जीवन की समस्याओं में जोड़ना, घटाना, गुणा करना, भाग देना एवं विभिन्न प्रकार की गणना करना।

(2) साहित्यिक कौशल– गणित जैसे कठिन एवं नीरस विषय की दैनिक जीवन की समस्याओं से जोड़कर हल करना।

(3) आकृति बनाने का कौशल–विभिन्न प्रकार की गणितीय आकृतियाँ जैसे कोण, त्रिभुज चतुर्भुज, वृत, बेलन, गोला आदि बनाना, लेखाचित्र दण्ड आरेख आदि बनाना।

(4) वैज्ञानिक कौशल– गणितीय समस्याओं को ढूंढना, उनका निरीक्षण करना, आंकड़ों का संग्रह करना, उनकी तुलना करना, विश्लेषण कर निष्कर्ष निकालना एवं प्राप्त ज्ञान का विभिन्न परिस्थियों में अनुप्रयोग करना।

(5) पहिचानने का कौशल– गणितीय संकेतों को पहचानना विभिन्न गणितीय समस्याओं को हल करने के लिये उनके उपयुक्त सूत्रों का प्रयोग करना, दिये गये प्रश्नों की इवारत पढ़कर उनका स्वरूप पहचानना कि क्या दिया है? क्या ज्ञात करना है? और कैसे ज्ञात करना है।

2. गणितीय दक्षताओं के विकास हेतु पाठ योजनाएँ–

उपर्युक्त दक्षताओं के विकास के लिये पाठयोजना बनाते समय सम्पूर्ण पाठ्यक्रम को विभिन्न इकाइयों एवं उपइकायों में विभाजित कर दिया जाता है, तत्पश्चात् गणितीय दक्षताओं के आधार पर चुनकर पाठ योजनाओं का निर्माण करते हैं।

पाठ योजना क्रं.

पाठ दाता———————————————

कक्षा –8 वीं वर्ग————————————विषय–गणित, कालखण्ड.................................

प्रकरण वृत के कास एवं परिधि में सम्बन्ध ज्ञात करना।

प्रवेशी दक्षताएँ–

(1) छात्र वृत को पहचानते हैं।

(2) छात्र वृत का केन्द्र ,परिधि, त्रिज्या एवं व्यास को पहचानते हैं।

(3) छात्र दी गई क्रिया का वृत खीच सकते हैं।

अपेक्षित दक्षताएँ–

(1) छात्र वृत की परिधि एवं व्यास में सम्बन्ध ज्ञात कर सकेंगे।

(2) छात्र π और उसके मान से परिचित हो सकेंगे।

(3) परिधि$=2\pi r$ सूत्र द्वारा छात्र वृत की परिधि अथवा व्यास अथवा त्रिज्या ज्ञात करने से संबंधित प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

शिक्षण अधिगम सामग्री–

1. शिक्षक द्वारा लाई जाने वाली सामग्री–लकड़ी या घातु की परकार पैमाना (स्केल), धागा, चॉक आदि।

2. छात्रों द्वारा लाई जाने वाली सामग्री– ज्यामितीय बाक्स, परकार स्केल आदि सहित पेंसिल, सफेद कागज, धागा आदि।

शिक्षण प्रक्रिया – अभिप्रेरणात्मक प्रश्नः–

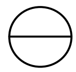
क्रं.	प्रश्न	उत्तर
1	श्यामपट पर बने वृत को दिखाकर यह कौन सी आकृति है?	यह वृत है।
2.	वृत पर व्यास के सिरों पर AB को दिखा कर इस	रेखाखण्ड AB को वृत का व्यास कहते हैं।

	रेखाखण्ड को क्या कहते हैं?	
3.	मैं संकेतक को जिस गोल घेरे पर घुमा रहा हुँ। उस गोल घेरे को क्या कहते हैं।	यह गोल घेरा वृत की परिधि कहलाता हैं
4.	परिधि की माप आप कैसे करोगे	धागे को परिधि पर लम्बाई से बिछाते जाते है। जितना धागा परिधि पर फैलता है उस धागे की लम्बाई स्केल से नापकर परिधि की लम्बाई ज्ञात कर लेते हैं।
5	परिधि और व्यास में क्या संबंध होता है।	छात्र निरूत्तर हो जाते हैं।

समस्या का प्रस्तुतीकरण – (शिक्षक कथन) छात्रों, आज हम वृत्त की परिधि और ब्यास में संबंध ज्ञात करेंगे।

प्रकरण – शिक्षण (समस्या समाधान हेतु ब्यूह रचना)

अधिगमबिन्दु	**क्रियाकलाप शिक्षक क्रिया**	**छात्र क्रिया**	**विशेष प्रकाश के बिन्दु**
1. समूह विभाजन	शिक्षक कक्षा के छात्रों को A, B,C और D चार समूहों में बांटेगा। शिक्षक कथन–छात्रों अपनी अपनी कापी में समूहबार दी गई त्रिज्या का वृत्त खीचिये।	छात्र चार समूह में विभाजित हो जाते हैं।	
2. दी गई त्रिज्या का वृत्त खींचे।	समूह A–5 सेंमी त्रिज्या का वृत्त खीचे। समूह B–6 सेंमी त्रिज्या का वृत्त खींचे। समूह C एवं D , 7 और 8 सेंमी त्रिज्या का वृत्त खींचे शिक्षक श्यामपर पर 20 सेंमी त्रिज्या का वृत्त खीचेगा और व्यास AOB की रचना	छात्र पेंसिल और परकार की सहायता से निर्दिष्ट वृत्त की रचना करेंगे। तथा अपने –अपने वृत्त की रचना में शिक्षक द्वारा की गई क्रिया का अनुकरण करेंगे।	

<table>
<tr><td></td><td>करेगा।</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. वृत्त में व्यास खीचना</td><td>शिक्षक कथन–छात्र अपने अपने वृत्त में एक व्यास खीचिए। A  B</td><td>छात्र अपने अपने वृत्त में एक व्यास खीचेंगे।</td><td></td></tr>
<tr><td>4. सारणी बनाना</td><td>कथन–अपनी कॉपी पर निम्नानुसार सारिणी बनाइए</td><td>छात्र अपनी कॉपी पर सारणी बनायेंगे।</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>गुप क.</td><td>परिधि की माप</td><td>व्यास की माप</td><td>परिधि / व्यास</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>शिक्षक कथन – अपने वृत की परिधि और व्यास की माप कर सारिणी में भरे।</td><td>छात्र अपनी कॉपी में सारिणी में भरेंगे।</td><td>शिक्षक तालिका बनायेगा।</td></tr>
<tr><td>5. परिधि का मापन</td><td>किया –शिक्षक अपने श्यामपट पर व्यास को मापेगा और सारणी में भरेगा।</td><td>छात्र अपने वृत की परिधि का धागे से मापन करेंगे।</td><td><table><tr><td>ग्रुप</td><td>परिधि की माप</td><td>व्यास की माप</td><td>परिधि /व्य</td></tr><tr><td>A</td><td>314</td><td>10</td><td>3.14</td></tr><tr><td>B</td><td>275</td><td>12</td><td>3.14</td></tr><tr><td>C</td><td>44</td><td>14</td><td>3.14</td></tr><tr><td>D</td><td>202</td><td>16</td><td>3.14</td></tr><tr><td>E</td><td>1255</td><td>40</td><td>3.14</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>6. व्यास पर सारिणी की पूर्ति करना</td><td>प्रत्येक समूह में एक छात्र आकर समूह की पूर्ति कीजिए।</td><td>छात्र निर्देशानुसार तालिका में अपने समूह की पूर्ति करेंगे।</td><td>परिधि/व्यास का मान सदैव समान आता है।</td></tr>
<tr><td>7. श्यामपट सारिणी की पूर्ति करना</td><td>प्रत्येक समूह से एक छात्र आकार समूह की पूर्ति कीजिए</td><td>छात्र निर्देशानुसार तालिका में अपने समूह की पूर्ति करेंगे।</td><td></td></tr>
<tr><td>8. परिधि में व्यास का भाग देना</td><td>कथन – प्रत्येक छात्र अपने वृत्त की परिधि को माप में व्यास के माप का भाग दीजिए।</td><td>छात्र निर्देशानुसार भाग देकर दशमलव के दो स्थानों तक उत्तर सरिणी में भरेंगे।</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>प्रश्न– रमेश तालिक को देखकर प्राप्त परिणाम से तुम क्या निष्कर्ष निकालोगे?</td><td>उत्तर– श्रीमान जी परिधि/व्यास का मान हर वार समान आ रहा है।</td><td>परिधि/व्यास $=\frac{22}{7}=3.14$ होता है।</td></tr>
<tr><td></td><td>कथन– वृत का विस्तार</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	कैसा भी हो, परिधि और व्यास का अनुपात सदैव समान $\frac{22}{7}$ होगा इस मान को एक निपतांक π (पाई) के द्वारा प्रदर्शित करते हैं।		
प्रश्न व्यास और त्रिज्या में क्या संबंध होता है।	उत्तर–व्यास त्रिज्या से दुगुना होता है।	व्यास = 2× त्रिज्या	
प्रश्न –यदि त्रिज्या को r से प्रदर्शित करे तो व्यास कितना होगा।	उत्तर –व्यास को 2r से प्रदर्शित करेंगे।	व्यास त्रिज्या के दो गुने के बराबर होता है।	

सामान्यीकरण :–

सूत्र स्थापना – तालिका के प्राप्त परिणामों से निम्नलिखित नियम स्थापित होता है–

1. किसी वृत्त की परिधि और उसके व्यास में अनुपात सदैव निश्चित होता है। चाहे वृत्त का विस्तार कितना भी हो।

2. **परिधि / व्यास :–** का मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 होता है। इसे एक नियतांक π से प्रदर्शित करते है।

अर्थात् $\frac{\text{वृत्त की परिधि}}{\text{वृत्त का व्यास}} = \pi$

$\frac{\text{वृत्त की परिधि}}{\mathbf{2\,r}} = \pi$ जहां r वृत्त की त्रिज्या है तथा 2r वृत्त का व्यास है।

अथवा वृत्त की परिधि = $2\pi r$

= $\pi \times$ वृत्त का व्यास

मूल्याकंन –

1. उस वृत्त की परिधि ज्ञात करो जिसकी त्रिज्या 14 सेंमी है।

2. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो जिसकी परिधि 132 सेंमी है।

व्यवहारगत परिवर्तन –

1. ज्ञानात्मक परिवर्तन –

अ. छात्र वृत्त की परिधि और उसके व्यास का संबंध जान चुके हैं।

ब. छात्र नियंताक और उसके मान से परिचित हो चुके हैं।

2. वोधात्मक परिवर्तन :– छात्रों ने वृत्त की परिधि को माप ज्ञात करने का सूत्र ज्ञात करना समझ लिया है, तथा इस सूत्र को उन्होंने आत्मसात कर लिया है।

3. कौशलात्मक परिवर्तन :– वृत्त की परिधि सूत्र का अनुप्रयोग करना छात्र सीख चुके है। यदि वृत्त की परिधि ज्ञात हो तो उस वृत्त का व्यास और त्रिज्या ज्ञात कर लेते हैं। और यदि वृत्त का व्यास अथवा त्रिज्या दी हो तो उक्त सूत्र का प्रयोग कर वृत्त परिधि ज्ञात कर लेते हैं।

निर्दिष्ट कार्य –

1. एक तार के टुकड़े से 6.6 सेमी भुजा का समबाहु त्रिभुज बना है। उसे मोड़कर एक वृत्तीय पहिया बनाय गया है। इस पहिए का व्यास ज्ञात कीजिए। (उत्तर :– 6.3 सेंमी)

2. एक साइकिल के पहिए का व्यास 70 सेमी है। जमीन पर दस चक्कर लगाने में वह कितनी दूरी तय करेगा। (उत्तर – 22 मीटर)

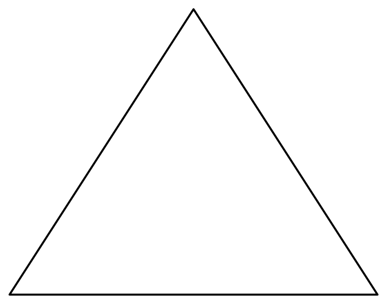
पाठगत प्रश्न

1. गणितीय दक्षताएं मुख्य रूप से कितने प्रकार की होती है।

दक्षता आधारित मूल्याकंन एवं मूल्यांकन रिकार्ड रखना :–

3. शिक्षण की तरह मूल्याकंन भी एक सतत् चलने वाली प्रक्रिया है। डॉ. बी.एस ब्लूम के अनुसार ''मूल्यांकन किसी वस्तु कार्य, पद्धति एवं सहायक सामग्री की उपयोगिता के संबंध में दिया गया निर्णय है।'' गणित में मूल्यांकन का मतलब है छात्र के व्यवहारगत परिवर्तनों की जानकारी अर्थात् गणित विषय के प्राप्त उद्देश्यों की पूर्ति किस सीमा तक हुई है। किन–किन दक्षताओं में छात्र कितनी समझ विकसित कर सका है। शिक्षक का शिक्षण एवं शिक्षण पद्धति कहां तक सफल रही, की भी जानकारी मिलती है। मूल्यांनक द्वारा हमें तीन बातों का बोध होता है। –

1. विषय के प्राय उद्देश्य
2. सीखने के अनुभव
3. मूल्यांकन एवं उसके साधन।



इसे त्रिभुज द्वारा प्रदर्शित किया गया है –

4. गणित में मूल्याकंन के उद्देश्य –

गणित में मूल्यांकन का मुख्य उद्देश्य यह है कि छात्र ने गणित विषय में उतनी दक्षता अर्जित कर ली है जितनी कि उससे अपेक्षा थी।

यथा –

1. गणित के पद, प्रत्यय, प्रक्रियाएं, सिद्धान्त, संकेत, कल्पना तथा संबंध कहां तक सीख लिये हैं।
2. गणित में निम्नलिखित कौशलों में किस सीमा तक दक्षता प्राप्त कर ली है।

   अ. प्रश्नों को हल करना।

   ब. रेखा गणित की आकृतियों को सही बनाना ।

   स. गणित की सारिणी को ठीक–ठीक पढ़ना व समझना।

   द. कोण, रेखा आदि को सही–सही मापना

   इ. गणित में प्रयोग किये जाने वाले यंत्रो को भली भांति प्रयोग करना।

   ड़ मानचित्र, रेखाचित्र की सही रूप में व्याख्या करने की क्षमता पैदा करना।

3. दैनिक जीवन में गणित के ज्ञान को किस सीमा तक प्रयोग करता है।
4. गणित विषय में कितनी रूचि पैदा कर ली है तथा इस विषय को कितना पसंद करता है।

5. मूल्याकंन के माध्यम से उचित शैक्षिक एवं व्यावसायिक निर्देशन देना।

5. मूल्यांकन का रिकार्ड रखना –

वर्तमान में छात्रों के स्तर का मूल्यांकन करने के लिये सतत् मूल्यांकन प्रक्रिया की जाती है। जिसमें मूल्यांकन का रिकार्ड विधिवत् रखा जाता है। मूल्यांकन का रिकार्ड व्यवस्थित रखने में हम पिछले मूल्यांकन (परीक्षा परिणाम) के साथ तुलना कर सकते हैं।

प्रत्येक बच्चे के पिछले माह के परीक्षा परिणाम के साथ तुलना करना, किन बच्चों में सुधार हुआ है व किन–बच्चों के परिणाम में कमी आई। साथ ही कमजोर बच्चों अर्थात् C व D ग्रेड के विद्यार्थियों की पहचान करना। D ग्रेड के छात्रों के पालक/अभिभावक से चर्चा करना एवं बच्चों के स्तर सुधारने में सहयोग के लिये प्रोत्साहित करना। यह सब मूल्यांकन रिकार्ड विधिवत रखने पर संभव है।

कक्षा के सभी छात्रों के मूल्यांकन का रिकार्ड अलग –अलग दक्षताओं पर आधारित अलग तालिकानुसार रखा जाना चाहिए ताकि छात्र का समग्र मूल्यांकन प्रपत्र तैयार किया जा सके। इस हेतु शाला में एक मूल्यांकन रजिस्टर बनाया जाना चाहिए तथा रजिस्टर के एक पन्ने पर तालिकानुसार दक्षतावार एक ही छात्र का मूल्यांकन रिकार्ड बनाया जाना चाहिए। तथा मूल्यांकन रिकार्ड को व्यवस्थित रखना चाहिए।

6. मूल्यांकन की विशेषताएं –

मूल्यांकन में निम्नलिखित विशेषताएं होना चाहिए –

1. **वस्तुनिष्ठता (objectivity)– ए**क परीक्षण वस्तुनिष्ठ कहलायेगी जबकि उसका सम्भावित उत्तर केवल एक ही हो।

2. **विश्वसनीयता (Reliability)** – एक परीक्षण तब विश्वसनीय कहलाता है जबकि उसके बार – बार मूल्यांकन करने पर कोई अतंर नहीं आता हो। ऐसी परीक्षाएं किसी भी समय किसी भी व्यक्ति द्वारा आयोजित की जा सकती है। मूल्यांकन पर कोई अन्तंर नहीं पड़ता।

3. **वैधता (Validity) –** किसी भी परीक्षा की वैधता का अर्थ है कि वह कितनी शुद्धता के साथ किसी छात्र की योग्यता का परीक्षण करती है, इसके लिये आवश्यक है कि वह विश्वसनीय हो।

4. **विभदेता** – परीक्षा प्रत्येक छात्र की आयु रूचि, बुद्धि–लब्धि एवं अनुभव के अनुरूप हो, ताकि सभी स्तर के छात्रों का परीक्षण किया जा सके।

5. उपयोगिता – (utility) वह परीक्षा उपयोगी कहलाती है, जिसमें सभी स्तर के प्रश्न हों तथा वस्तुनिष्ठता, वैधता एवं विश्वसनीयता का भी प्रयोग किया गया हो।

6. व्यापकता – (Comprehensivness)– एक परीक्षा तब व्यापक कहलायेगी, जबकि विषय के सभी अंशों तथा उपअंशों से प्रश्न पूछे जायें।

7. व्यावहारिकता – (Practicability) – वह परीक्षा व्यावहारिक होगी जिसके संचालन में सरलता हो तथा भाषा सरल एवं बोधगम हो।

पाठगत प्रश्न :

2. गणित में दक्षता आधारित मूल्यांकन के उद्देश्य क्या हैं।
3. गणित मे उपलब्धि परीक्षण कितने प्रकार का होता है।

उपइकाई – 2

1. आकलन एवं उसकी संकल्पना

मूल्यांकन के प्रकारों में अनेक दोष थे। जैसे निबंधात्मक परीक्षण में जहां केवल स्मरण शक्ति का ही मूल्यांकन होता है वहीं इसमें विस्वसनीयता वैधता, वस्तुनिष्ठता, व्यापकता आदि गुणों का अभाव भी होता है। दूसरी ओर वस्तुनिष्ठ परीक्षणों में किसी से उत्तर पूंछकर देना अथवा अनुमान लगाकर उत्तर देने जैसे दुर्गुणों के अतिरिक्त ये परीक्षण केवल तथ्यात्मक ज्ञान तक ही सीमित है तथा इनमें मौलिक चिन्तन अभिव्यक्ति क्षमता एवं छात्र की कल्पना शक्ति का परीक्षण नहीं हो पाता है। उक्त तथ्यों को ध्यान में रखते हुये मूल्यांकन तकनीक में सुधार की आवश्यकता महसूस की जा रही है।

मूल्यांकन निरंतर चलने वाली प्रक्रिया है अतः सीखने के साथ निरंतर मूल्यांकन होता रहना चाहिए। एवं वह मूल्यांकन के उद्देश्यों की पूर्ति करता हो अर्थात् विश्वसनीयता, विभेदता, वैधता जैसे गुणों के साथ – साथ बच्चे का मूल्यांकन निदानात्मक हो जिससे बच्चे का उपचारात्मक शिक्षण देकर विशिष्ठ क्षेत्र की दुर्बलता दूर की जा सके।

उक्त सभी विशेषताओं को ध्यान में रखकर एवं रोज कराई जाने कराई जाने वाली गतिविधियों को महत्व देते हुये मूल्यांकन कराये जाने पर बल दिया गया। इस प्रकार के मूल्यांकन को 'आकलन' कहते हैं। अर्थात्

''आंकलन मूल्यांकन की वह विधा है जिसमें रोज कराई जाने वाली गतिविधियों में ही अथवा वैसी ही गतिविधि कराकर परीक्षा ली जाती है। इसमें बच्चो को यह नहीं बताया जाता कि उनकी परीक्षा की जा रही है, उन्हें तो केवल यह कहा जाता है कि आज हम फलां खेल या गतिविधि करेंगे। ये गतिविधियां एक या एक से अधिक दक्षताऐं लिये होती हैं। इस परीक्षा में अंक देकर उत्तीर्ण या अनुत्तीर्ण नहीं करते बल्कि उनके स्थान पर स्पष्ट रूप से लिखा जाता है कि बच्चे को विषयावार दक्षताओं में क्या क्या आता है तथा विभिन्न विषयों की किन – किन दक्षताओं में कहां – कहां और कैसी – कैसी कठिनाई बच्चे को आ रही है। जिसे अगली कक्षा में शिक्षक उन कठिनाइयों को दूर करने का प्रयास करता है। इस प्रकार की परीक्षा में बच्चे को परीक्षा का भय नहीं रहता है और न ही परीक्षा के अतिरिक्त तैयारी करनी पड़ती है। व्यक्तिगत या समूहों में प्रत्येक बच्चे की सहभागिता के आधार पर आंकलन कर सकते हैं। प्रत्येक बच्चे के लिये आकलन प्रतिदिन अथवा साप्ताहिक, मासिक अथवा विभिन्न चरणों में अलग–अलग दिनांको अथवा अलग – अलग समूहों के बच्चों का अलग – अलग दिनांको में आकलन बच्चों की सहभागिता के आधार पर करके उनका रिकार्ड शाला में रखा जाता है। अतः ''आकंलन सतत् चलने वाली प्रक्रिया है।''

2. आकलन का महत्व –

1. गणित विषय में आकलन का महत्व सीखने के एक साधन के रूप में होता है।

2. गणित विषय में आकलन का सर्वाधिक महत्व बच्चे की उन कठिनाइयों के बारे में पता चल जाता है जो बच्चे को सीखने में बाधक बन रही है।

3. आकलन का महत्व इस कारण भी है कि इसमें परीक्षा संचालन हेतु तथा विद्यार्थियों को परीक्षा तैयारी हेतु अलग से कोई व्यवस्था नहीं करनी पड़ती।

4. आकंलन में परीक्षा संबंधी कोई अतिरिक्त व्यय नहीं करना पड़ता है।

5. आकंलन दक्षता आधारित होने के कारण गणित विषय के प्राप्त उद्देश्यों को पूण करने वाला होता है।

6. आकलन गणित विषय की गतिविधियों तथा क्रियाकलापों पर आधारित होने के कारण विश्वसनीय होता है।

7. आकलन के समय बालक खेल में मनोरंजक तरीकों से गणित विषय की दक्षताओं को प्राप्त करता है और उसे पता भी नहीं चलता कि उसका आंकलन या मूल्यांकन किया जा रहा है। इस प्रकार भय मुक्त होता है।

8. आकलन से बच्चे के पालक/शिक्षक को बच्चे की सही स्थिति एवं उपलब्धि स्तर का सही ज्ञान हो जाता है।

9. इसमें बालक को अनुत्तीर्ण होने जैसे आघात या संताष का सामना नहीं करना पड़ता

10. इसमें एक बच्चे की तुलना दूसरे बच्चे से नहीं की जाती ।

11. आकलन हेतु हर बच्चे पर ध्यान रखना आवश्यक होता है।

12. आकलन स्मरण शक्ति का न होकर दक्षताओं का होता है।

3. आकलन के प्रकार –

1. **सतत् एवं व्यापक आकलन –** आकलन निरंतर चलने वाली प्रक्रिया है। सतत् आकंलन से बच्चों का टेस्ट न लेकर गतिविधियों के दोरान ही बारीकी से यह देखा जाता है कि बच्चे में निर्धारित दक्षताओं का विकास हुआ है। या नहीं। यदि हुआ है ता किस स्तर तक हुआ है, कहां कठिनाई आ रही है। कुल मिलाकर सिर्फ यही नहीं देखना है कि बच्चे ने क्या सीखा है ? क्या नहीं ? बल्कि यह भी समझना है कि सीखने में कहां कठिनाई आ रही है ? तथा उसके अनुसार सुधारात्मक प्रयास भी करना है। यह आंकलन प्रत्येक क्रियाकलाप एवं गतिविधि के दौरान करते रहना है

2. **चरणबद्ध या दक्षता समूह आकलन –** सर्वप्रथम पाठ्यक्रम की समस्त दक्षताओं को एक दूसरे से जुड़ने से जुडने वाली दक्षताओं के विभिन्न समूह बनाकर प्रत्येक दक्षता समूह को क्रमशः प्रथम, द्वितीय च तृतीय चरण निर्धारित कर देते हैं। प्रत्येक चरण से संबंधित दक्षताओं को पूरा करने का समय भी निर्धारित कर दिया जाता है। बच्चों का आंकलन का रिकार्ड चरणवार रखा जाता है तथा चरणवा बच्चे के पालक अपने बच्चे की उपलब्धि स्तर से परिचित होता रहता है। चरणबद्ध आंकलन में भी प्रत्येक बच्चे का प्रत्येक दक्षता में आकलन किया जाता है।

3. व्यक्तिगत का समूहवार आकलन –

आकलन अलग – अलग बच्चे को अलग – अलग कार्य कराकर अथवा गतिविधि कराकर किया जा सकता है तथा 5–6 बच्चों की टोली बनाकर समूह गतिविधि कराकर टोली के प्रत्येक बच्चें पर विशेष ध्यान देकर प्रत्येक बच्चे की स्थिति एवं स्तर का रिकार्ड दक्षतानुसार किया जा सकता है। इस प्रकार एक दिन में 1 या

2 टोली के बच्चों का आकलन कर एक कक्षा में आकलन 6–7 दिन तक जारी रखा जा सकता है। कई बार दो – दो बच्चों की टोली भी बनाई जाती है।

4. आकलन की विशेषताएं –

1. आकलन की मुख्य विशेषता सीखने के साधन के रूप में होती है।

2. आकलन की दूसरी मुख्य विशेषता यह है कि इससे उन कठिनाइयों के बारे में पता चलता है जो बच्चों के सीखने में बाधक बन रही है। जिससे बच्चों में सुधारात्मक प्रयास किये जा सकते हैं।

3. आंकलन अभ्यास के अवसर प्रदान करता है। किसी दक्षता में पूर्णतः कुशलता प्राप्त करने हेतु बार – बार अभ्यास करना पड़ता है, अतः आकंलन से पूर्व यह विचार कर लेना नितांत आवश्यक है कि छात्र को क्षमता प्राप्ति के पर्याप्त अवसर प्रदान किये गये हैं अथवा नहीं।

4. भययुक्त वातावरण – आकलन करते समय छात्र अपनी गतिविधियों में रूचिपूर्वक भाग ले रहें होते हैं और उनका आकलन हो जाता है। छात्र को यह आभास भी नहीं होता कि उसकी परीक्षा की जा रही है।

5. परीक्षा स्मरण शक्ति पर आधारित होती है जबकि आकलन दक्षता एवं गतिविधि आधारित होता है। इसमें छात्र को रटने से मुक्ति मिल जाती है।

6. आकलन न केवल बालक का होता है बल्कि शिक्षक की शिक्षण प्रक्रिया का भी होता है कि कहां तक सफल रही है।

7. इसमें परीक्षाओं की तरह अतिरिक्त व्यय की आवश्यकता नहीं होती।

8. आकलन संचालन हेतु अलग से कोई व्यवस्था नहीं करनी पड़ती।

9. बच्चे की सही स्थिति का ज्ञान –आकलन से बच्चे की सही स्थिति एवं स्तर का ज्ञान हो जाता है। जिससे बालक के पालक/शिक्षक बच्चे की कठिनाइयों के निवारण का प्रयत्न करते है।

5. आकलन का उपयोग

1. **सुधारात्मक प्रयास –** कठिनाइयों का पता लग जाने के पश्चात् उपचारात्मक शिक्षण द्वारा अभ्यास के अधिक से अधिक अवसर देकर सुधारात्मक प्रयास किये जाते हैं।

2. **अभ्यास के अवसर–** आंकलन के द्वारा छात्रों की अभ्यास को अवसर अधिक प्रदान किये जाते है।

3. **प्रत्येक बच्चे पर ध्यान देने के पर्याप्त अवसर–**आंकलन कक्षा के सभी बच्चों पर ध्यान देने का पर्याप्त एवं उचित अवसर मिलता है।

4. **छात्र के स्तर में सुधार–** जब हमें छात्र की कठिनाइयों एवं स्तर का पता व लग जाता है तो शिक्षक उसकी कठिनाइयों के निराकरण का भरसक प्रयत्न करता है। इस प्रकार छात्र के स्तर में और सुधा एवं पूर्णतः कुशलता प्रदान कराने हेतु सुधार के पूर्ण अवसर प्राप्त होते हैं।

5. **शिक्षण प्रणाली में सुधार –** किसी पाठ को समझने में जब अधिकांश बच्चे कठिनाई महसूस करते हैं तब शिक्षक अपनी प्रणाली में परिवर्तन या सुधार करता है।

उपइकाई –तीन

कठिनाइयों का निदान :–

1. कक्षा में कुछ छात्र ऐसे भी होते है जिन्हें गणित कठिन लगता है। उन्हें गणित समझने और सबाल हल करने में कठिनाई होती हैं।

2. इसी प्रकार गणित में कुछ ऐसे प्रकरण भी होते हैं जिनमें कक्षा के अधिकांश छात्रों को समझने में कठिनाई होती है।

जिस प्रकार एक चिकित्सक अपने मरीज की सम्पूर्ण जांच करके रोग का निदान करता है तथा तब उस रोग का उपचार करता है। उसी प्रकार शिक्षक अपने छात्रों की कठिनाइयों का निदान करता है तथा उसके उपचार के लिए विशेष अध्यापन की व्यवस्था करता है।

गणित में कठिनाइयों के निदान के लिये परीक्षाएं या आकलन किया जाता है तथा प्राप्त उत्तरों से यह अध्ययन किया जाता है कि छात्र ने किस प्रकार की त्रुटि की है। ये त्रुटि होने के कौन – कौन से कारण हो सकते हैं।

निदानात्मक परीक्षण, स्क्रीनिंग परीक्षण से भिन्न होता है। इस परीक्षण में गणित के उस विषय के भिन्न–भिन्न खण्ड़ों से अलग– अलग परीक्षणों का निर्माण कर सकते हैं। जिनमें छात्रों को विशेष कठिनाई हो। ऐसी कौन – सी त्रुटियां या भूलें हैं, जो व्यक्तिगत है। और कौन सी सामूहिक है ? नैदानिक परीक्षण में जो प्रश्न पूछे जाते हैं वे पूरे पाठ्यक्रम से नहीं होते वरन् प्रकरण विशेष या पाठ योजना विशेष पर आधारित होते हैं। जैसे –गणित में प्रतिशत के बारे में कठिनाइयों की जानकारी एकत्रित करनी हो तो उसे अलग – अलग खण्डों में निम्नानुसार बांटते हैं।

1. प्रतिशत का अर्थ
2. दिये गये आंकड़ों से प्रतिशत ज्ञात करना।
3. प्रतिशत को दशमलव भिन्नऔर दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलना।
4. प्रतिशत को साधारण भिन्न और साधारण भिन्न को प्रतिशत में बदलना।

उपर्युक्तानुसार अलग – अलग परीक्षाएं निर्मित करनी होगी जिसके आधार पर निम्न प्रकार की जानकारी शिक्षक को एकत्रित करनी होगी।

1. छात्र किस प्रकार की त्रुटि करते हैं।
2. किन – किन परिस्थितियों में ये त्रुटियां होती है।
3. इन त्रुटियों के होने के क्या कारण हैं ?
4. इन त्रुटियों का आपस में क्या कोई संबंध है ?
5. ऐसी कौन सी त्रुटियां है जिनका सामूहिक स्तर पर उपचार आवश्यक हैं।
6. ऐसी कौन सी त्रुटियां है जिनक व्यक्तिगत स्तर पर उपचार आवश्यक हैं ?
7. इन त्रुटियों का विषय सामग्री को सीखने पर क्या प्रभाव पड़ताी है।
8. उपर्युक्त त्रुटियों की जानकारी निदानात्मक परीक्षाओं में की जा सकती है। इसके पश्चात् इनके उपचार की योजना तैयार की जाती है।

2. कठिनाइयों के निराकरण के लिये अध्यापन –

गणित में कठिनाइयों के निराकरण के लिये शिक्षक को निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए।

1. कक्षा में शिक्षकीय समस्याओं को हल करते समय छात्रों का ध्यान विशेष रूप से उन प्रत्ययों, सिद्धांतों एवं प्रक्रियाओं की ओर खीचा जाए जिनमें छात्र त्रुटियां करते हैं।
2. छात्रों द्वारा की गई सामूहिक त्रुटियों के लिये शिक्षक को अपनी अध्यापन शैली का भी मूल्यांकन करना होगा। वहीं त्रुटिपूर्ण शिक्षण के कारण तो छात्र सामूहिक त्रुटियां तो नहीं कर रहें है।
3. व्यक्तिगत कठिनाइयों को दूर करने के लिए अतिरिक्त समय देना होगा ताकि छात्र स्वयं की त्रुटियां को निराकरण कर सकें।
4. कक्षा में पर्याप्त अभ्यास कार्य करवाया जाये।

5. कमजो छात्रों का आदर्श प्रश्न हल करने के लिए प्रोत्साहित किया जाए।
6. मेघावी छात्रों के साथ समूह बनाया जाये ताकि कमजोर छात्र उनके साथ अध्ययन कर सके।
7. छात्रों को अपनी त्रुटियों को समझने का पर्याप्त अवसर दिया जाना चाहिए।
8. कमजोर छात्रों को कक्षा में आगे बैठाना चाहिए।
9. गणित पढ़ाने में ''सरल से कठिन की ओर'' विधि का अनुसरण करना चाहिए।

<u>उपइकाई—चार</u>

1. गणित में सृजनात्मकता

सृजनात्मकता छात्र में मानसिक प्रक्रिया है, जिसके अंतर्गत किसी नये विचार का जन्म होता है। इसमें किसी नवीन अवधारणा, नवीन आविष्कार अथवा नवीन खोज पर बल दिया जाता है जो समाज के लिये उपयोगी हो। ई.पाल टारेन्स के अनुसार 80% छात्रों में व्यक्तित्व विशिष्टता से टी सृजनात्मकता लायी जा सकती है। शेड्स के अनुसार 'व्यक्तित्व' वातावरण से संचालित होता है, इसलिए सृजनात्मकता में व्यक्तित्व, प्रतिफल एवं प्रक्रिया के साथ—साथ वातावरण पर भी विचार किया जाना चाहिए। अर्थात् सृजनात्मकता एक मानसिक प्रक्रिया है, जो नये विचार, प्रारूप या संबंध पैदा करने के लिए पर्यावरण को पुनः संयोजित या सम्पादित करती है। यह मौलिक कार्य करने की क्षमता है या बहुमुखी योग्यता है कुछ विद्वानों ने सृजनात्मकता को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया है— यह विभिन्न प्रत्ययों, विचारों और वस्तुओं में एक अभिनव संबंध जोड़ने का प्रयास करता है अर्थात् यह एक प्रकार की संश्लेषण योग्यता है। सृजनात्मकता के मुख्य घटक हैं— (1) लचीलापन (2) प्रवाह (3) मौलिकता (4) जिज्ञासा (5) नवीनता

2. <u>सृजनात्मक विद्यार्थी के गुण—</u>

1. जिज्ञासा व सज्जनता
2. कठिन से कठिन समस्या को अपनी सूझबूझ से हल करने की क्षमता
3. बुद्धिलब्धि (आई.क्यू.) सामान्य विद्यार्थी से अधिक।
4. अंतर्मुखी प्रतिभा वाले
5. विचारों में कल्पना शक्ति की अधिकता।
6. गंभीर, चिन्तनशील, एकाकी
7. मानसिक व शारीरिक रूप से सक्रिय
8. एक ही वस्तु में विभिन्न रूपों को देखने की क्षमता
9. बहुत से विचारों को एक ही समाज में केन्द्रित करने की योग्यता।

3. सृजनात्मकता विकसित करने हेतु शिक्षक की भूमिका—

छात्रों में सृजनात्मकता विकसित करने हेतु शिक्षक की निम्नलिखित भूमिका होती है—

1. शिक्षक में सृजनात्मक प्रतिभा होनी चाहिए।

2. विभिन्न नई स्थितियॉ उत्पन्न कर उन्हें नई दिशा में चिन्तन एवं तर्क हेतु प्रोत्साहित करना चाहिए। छात्र उसके अनुरूप अभिव्यक्ति कर सकेगा।
3. नवीन समस्या उत्पन्न कर उसका समाधान ढूंढना चाहिए।
4. गणित प्रदर्शनी, संग्रह आदि को दिखाकर वैसी ही वस्तुएं बनाने हेतु प्रेरित करना चाहिए।
5. छात्रों को नवीन खोजों हेतु प्रोत्साहन दिया जाना चाहिए।
6. छात्रों में कल्पना शक्ति, तार्किक शक्ति एवं मौलिकता के विकास हेतु विषय से संबंधित लेख एवं वाद–विवाद हेतु प्रोत्साहन दिया जाए।
7. अध्यापक छात्र की रूचि एवं क्षमता को देखकर उसमें नवीन विधा का विकास कर सकते हैं।
8. नवीन शिक्षण पद्धतियों का प्रयोग, अच्छी संदर्भ पुस्तकों का प्रयोग (पठन–पाठन), सृजनात्मकता विकसित करने के प्रमुख साधन हैं।
9. गणितीय मनोरंजन, पहेली, नये सूत्र एवं गणितज्ञों के कार्य मौलिक चिन्तन के आधार है।
10. छात्रों द्वारा निर्मित मॉडल चार्ट एवं संग्रह ऐसे साधन हैं, जो सृजनात्मकता का विकास करते हैं।
11. नवीनता लिए हुये यह अमूर्त उपलब्धि आत्म–प्रकाशन का माध्यम है।
12. छात्रों को नयी संकल्पनाएं लेकर नये मूल्य स्थापित करने, नवीन कार्यो का सृजन कर उपयोगी बनाने में सृजनशील एवं निष्ठावान शिक्षक की भूमिका नितान्त आवश्यक हैं।

1. गणित के संदर्भ में बाल–केन्द्रित तथा क्रियाकलापों पर आधारित शिक्षण–

वर्तमान समय में बाल मनोविज्ञान तथा शिक्षा मनोविज्ञान बाल केन्द्रित शिक्षा पर आधारित हैं। बाल केन्द्रित शिक्षा में बाल शैक्षिक कार्यक्रम का मुख्य केन्द्र बालक होता है। बाल केन्द्रित शिक्षा में सीखने की प्रक्रिया पर विशेष ध्यान दिया जाता है। बालक सक्रिय भागीदारी के माध्यम से स्वयं करके सीखता है। शिक्षक इसमें सहायक व मार्गदर्शक होता है।

गणित की शिक्षा बालक के आसपास के परिवेश में उपलब्ध और परिचित सामग्री के माध्यम से कराई जा सकती है। प्रत्यय व धारणाएं समझाए जा सकते है। प्राथमिक स्तर के छात्र लगभग 6 से 11 वर्ष की आयु के होते है। यह स्तर पूर्ण क्रियाशील स्तर कहलाता है। इस आयु में बच्चे तर्क संगत चिंतन कर सकते हैं। बच्चे अंको को गिनती सीखने के बजाय वास्तविक पदार्थ गिनकर अंक गणित की गणना क्रिया को अच्छी तरह से समक्ष सकते हैं। छात्र को क्षेत्रफल या आयतन का पाठ सिखाना है तो उसे वास्तविक वस्तुएं या क्षेत्र दिखाकर समझाया जा सकता हैं। क्रय–विक्रय, लाभ–हानि, ब्याज, छूट आदि प्रकरणों में दैनिक जीवन से संबंधित उदाहरणों को लेकर आसानी से गणित सीखाया जा सकता है। ज्यामिती में त्रिभुज, चतुर्भूज, वृत्त आदि को अभ्यास द्वारा समझाया जा सकता है। गणित की पहेलियां व खेल भी बाल केन्द्रित शिक्षा के लिए उपयोगी हैं।

बाल केन्द्रित शिक्षा प्रणाली का लक्ष्य विद्यार्थी की मदद करना है जिससे वह–

- स्वतंत्र रूप से काम कर सकें तथा अपना उत्तर दायित्व समझ सकें।
- स्वयं अपनी बृद्धि से अपना मार्ग–चुन सके।
- अच्छे और बुरे की पहचान कर सके व दूसरों के योगदान का भी मूल्यांकन कर सके।

यदि हमें बाल केन्द्रित शिक्षा पद्धति के लक्ष्य तक पहुचना है, तो हमें कुछ निर्देशों का पालन करना होगा। हमें विद्यार्थी की योग्यताओं, रूचिओं व शारीरिक सामर्थ्य के बीच के अंतर को जानना होगा, तदनुसार अपना रास्ता तय करना होगा। केवल योग्यता के अनुसार विद्यार्थियों का समूह बनाने से काम नहीं चलेगा, संभव है। हो सकता है कि एक औसत बुद्धि का छात्र गणित में औसत के ऊपर हो, भाषा ज्ञान में औसत से नीचे हो और व्यावहारिक गतिविधियों में औसत से बहुत ऊपर हो, इसलिए प्रत्येक विद्यार्थी की योग्यता व अभिरूचि को ध्यान में रखते हुए ही उसका पथ प्रदर्शन किया जाना चाहिए।

बाल केन्द्रित शिक्षा में व्यावहारिक रूप से शिक्षक की भूमिका निम्नलिखित रूप में होना चाहिए–

- विद्यार्थी में शिक्षक के प्रति विश्वास
- विद्यार्थी की अन्तः प्रेरणा को उभारने व स्पष्ट करने में मददगार
- विद्यार्थी ज्ञानार्जन हेतु साधनों को जुटाना।
- विद्यार्थी के साथ लचीला व्यवहार
- विद्यार्थी में सुखद वातावरण तैयार करना

2. गणित के प्रश्न पत्र का ब्लू प्रिन्ट बनाकर प्रश्न पत्र बनाना

प्रचलित मूल्यांकन प्रणाली में प्राथमिक स्तर पर कक्षा 1 से 4 तक मौखिक एवं लिखित परीक्षा का तथा कक्षा 5 में पूर्णतः लिखित एवं माध्यमिक स्तर पर पूर्ण रूप से लिखित परीक्षा का प्रावधान है लिखित परीक्षा लेने के लिये प्रश्न पत्र की आवश्यकता होती है। प्रश्न पत्र बनान के पूर्व एक योजना तैयार की जाती है जिसमें प्रश्नों के उद्देश्य चयन, प्रश्नों के विभिन्न प्रकार का चयन उनके लिये अंको का निर्माण आदि किया जाना आवश्यक होता है। अतः प्रश्नपत्र बनाने के लिए चरणबद्ध निम्नानुसार प्रक्रिया की जाती है–

(A) प्रश्नों का चयन–उद्देश्य के आधार पर

1. ज्ञान पर आधारित–अर्जित ज्ञान पर आधारित प्रश्न, घटनाएं, सूत्र, सिद्धांत, वर्गीकरण, विधि आदि।
2. अनुप्रयोग पर आधारित–सूत्र के आधार पर सवाल हल करना। दिए गए डाटा के आधार पर परिणाम बताना। तर्क देने वाले प्रश्न (ज्ञान का अनुप्रयोग करना)

3. समझ पर आधारित—एक डाटा को दूसरे डाटा में बदलना, संबंध ज्ञात करना, अंकीय गणना करना आदि।
4. कौशल पर आधारित —चित्र बनाना, नामांकन करना आदि।

(B) प्रश्नों का चयन, प्रश्नों के प्रकार के आधार पर प्रदेश की मूल्यांकन प्रणाली में दी गई नीति के अनुसार प्रश्नों के प्रकार का चयन करना होगा। उदाहरण—

वार्षिक परीक्षा (कक्षा 5 व 8)

प्रश्नों के प्रकार	कक्षा 5	कक्षा 8
वस्तुनिष्ट प्रश्न	20%	10%
अति लघुउत्तरीय	15%	20%
लघुउत्तरीय	35%	40%
दीर्घ उत्तरीय	30%	30%

(C) प्रत्येक प्रश्न हल करने के लिए संभावित समय भी देना उचित होगा। उदाहरण के लिये—प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए 10 मिनिट तथा प्रश्नपत्र हल करने के पश्चात् उत्तर पुस्तिका चैक करने के लिए 10 मिनिट का समय। इस प्रकार निर्धारित कुल समय में से 20 मिनिट समय निकाल कर प्रत्येक प्रश्न के लिये समय का आकलन करना चाहिए।

(D) पाठ्यक्रम का निर्धारण— कुल पाठ्यक्रम से कौन—कौन सी इकाई एवं पाठ पूछे जावेगे, इसे पहले से निर्धारित कर लेना चाहिए।

(E) प्रत्येक विषय वस्तु को अंको का अधिभार दिया जाना—

इसके लिए परीक्षा के लिए किए गए निर्धारित पाठ्यक्रम में दी गई इकाई विषयवस्तु की उपयोगिता के आधार पर कुल अंक निर्धारित कर दिये जाते हैं।

a) प्रश्नों के कठिनाई का स्तर निर्धारित कर ले, जैसे वर्तमान में वार्षिक परीक्षा के लिये प्रश्न के कठिनाई का स्तर निम्नानुसार है—

सरल प्रश्न – 30%

सामान्य प्रश्न – 50%

कठिन प्रश्न – 20%

b) अंकां की योजना – इसे ब्लू प्रिंट भी कहते हैं। प्रश्न पत्र बनाने के पूर्व ब्लू प्रिंट तैयार किया जाता है तो प्रश्न बनाना अत्यंत आसान हो जाता है। जिसका डिजाइन प्रारूप देखें–

<u>प्रश्न पत्र – डिजाइन</u>

विषय :...

निर्धारित समयावधि :..

कक्षा :..

निर्धारित अधिकतम अंक :...

1. प्रश्नों के उद्देश्य

उद्देश्य	ज्ञान आधारित	समझ आधारित	अनुप्रयोग	कौशल
प्रतिशत अंक	....	....	....	....

2. प्रश्नों के प्रकार

प्रश्नों के प्रकार	वस्तुनिष्ठ	अतिलघु उत्तरीय	लघु उत्तरीय	दीर्घ उत्तरीय
प्रतिशत अंक	....	....	....	....

3. प्रश्नपत्र हल करने में सम्भावित समय मिनिट में

वस्तुनिष्ट	अतिलघु उत्तरीय	लघु उत्तरीय	दीर्घ उत्तरीय
....	....	....	....

4. विषय वस्तु का अधिभार

इकाई क्रमांक	इकाई का नाम	अंक
1		
2		
3		
4		
5		

5. प्रश्नों के कठिनाई का स्तर–

   सरल =------------------------%

   सामान्य =------------------------%

   कठिन =------------------------%

6. प्रश्न पत्रों का खण्ड में विभाजन
7. विकल्प का दिया जाना।

अंक योजना प्रपत्र (**Blue Print**) का बनाना

प्रश्न पत्रों को बनाने के पूर्व उपर्युक्त सभी बिन्दुओं को ध्यान में रखते हुये अंक बनाते हैं जिसे ब्लू प्रिंट कहते हैं। ब्लू प्रिंट प्रत्येक परीक्षा–इकाई, त्रैमासिक, छः मासिक, वार्षिक के लिये बनाना चाहिए। ब्लू प्रिंट का प्रारूप निम्नानुसार हैं–

ब्लू प्रिंट (अंक योजना पत्रक)

विषय .... कक्षा ....

इकाई / प्रश्नपत्र................................ समय ....

अधिकतम अंक................................

उद्देश्य	ज्ञान पर आधारित				समझ पर आधारित				अनुप्रयोग पर आधारित				कॉशल पर आधारित			
प्रश्नों के प्रकार	वस्तुनिष्ठ	अति लघु उ.	लघु उ.	दीर्घ उ.	वस्तुनिष्ठ	अति लघु उ.	लघु उ.	दीर्घ उ.	वस्तुनिष्ठ	अति लघु उ.	लघु उ.	दीर्घ उ.	वस्तुनिष्ठ	अति लघु उ.	लघु उ.	दीर्घ उ.
1																
2																
3																
4																
5																
6																

7																

इस प्रकार ब्लू प्रिंट बनाकर प्रश्न पत्र बनाया जाता है। ताकि सभी इकाइयों का मूल्यांकन किया जा सके। तथा जिस इकाई को जितना महत्व दिया गया है उस स्तर से प्रश्न पूछे जा सके।

3. <u>उपरोक्त प्रश्नपत्र की आदर्श उत्तर पत्रिका बनाकर क्रमवार अंकों को विभाजन–</u>

ब्लू प्रिंट बनाकर प्रश्नपत्र की रचना कर ली जाती है। इस प्रश्नपत्र का आदर्श उत्तर बनाया जाता है ताकि मूल्यांकन करते समय वस्तुनिष्ठता बनी रहे। आदर्श उत्तर एवं क्रमवार अंको का विभाजन बनाते समय निम्न बातों का ध्यान रखा जाता है–

1. प्रश्नपत्रों के निर्देशों का पालन किया गया है।
2. प्रश्न पत्र में दिए गये शब्द सीमा का पालन किया गया है।
3. प्रश्न में पूछी गयी अवधारणा का ही जवाब दिया गया है।
4. गणित के चिन्हों का उचित प्रयोग किया गया है।
5. सवाल हल करने के प्रत्येक पद पर अंकों का उचित वितरण किया गया है।

4. गणित के परीक्षाफल का विश्लेषण कर निदानात्मक उपचार–

परीक्षा परिणाम का विश्लेषण एक ऐसी प्रक्रिया है जो लिंग वार, विषयवार, स्कूल के प्रकार वार, बच्चों के उपलब्धि स्तर की स्थिति के बारे में ज्ञान कराती हैं। साथ ही मूल्यांकन की प्रक्रिया, प्रश्नपत्र की गुणवत्ता, कठिन बिन्दुओं की स्थिति के बारे में फीडबैक देती है। परीक्षा परिणाम का विश्लेषण दो प्रकार से किया जाता है–

1. सांख्यिकीय विश्लेषण
2. गुणात्मक विश्लेषण

1. सांख्यिकीय विश्लेषण–

इसके अंतर्गत हम प्राप्त परीक्षा परिणाम को लिंगवार, जातिवार, विषयवार, स्कूल प्रकार वार विश्लेषण करके बच्चों की उपलब्धि स्तर के बारे में जानकारी प्राप्त करते हैं।

2. गुणात्मक विश्लेषण–

इसके अंतर्गत हम प्रश्नपत्र व उत्तर पुस्तिकाओं का विश्लेषण करते हैं। इस विश्लेषण का स्वरूप निम्नानुसार है–

प्रश्नपत्र का विश्लेषण

प्रश्नपत्र के विश्लेषण से हमें पता चलता है कि–

- कौन से प्रश्न की भाषा अस्पष्ट थी?
- कौन से प्रश्न की भाषा अस्पष्ट थी?
- कौन से प्रश्न पत्र में निर्धारित ब्लू प्रिंट के अनुसार अंक विभाजन नहीं था?
- प्रश्न की संरचना, प्रश्न हल करने का समय उपयुक्त था?
- अंक प्रदान करने की योजना (आदर्श उत्तर) स्पष्ट व ठीक थी?
- प्रश्नों में त्रुटि तो नही थी? आदि

  प्रश्न पत्र विश्लेषण में हमें प्रश्नपत्र की गुणात्मकता को सुधारने हेतु फीडबैक प्राप्त होता है, जिसमें निरन्तर प्रश्न पत्रों की गुणवत्ता में सुधार किया जाता है।

उत्तर पुस्तिका विश्लेषण–

उत्तर पुस्तिका विश्लेषण से बच्चों द्वारा हल प्रश्नों का प्रश्नवार विश्लेषण किया जाता है। प्रश्नवार विश्लेषण हम निम्नानुसार करते हैं–

- कौन–सा प्रश्न कितने बच्चों ने सही हल किया हैं?
- कितने बच्चों ने गलत हल किया है कहां गलती की है?
- कितने बच्चों ने आधा हल किया है?
- कितने बच्चों ने हल नहीं किया है?

उक्त विश्लेषण के आधार पर हम बच्चों की कठिनाईयों (हार्ड स्पॉट) की पहचान करते हैं इसके बाद बच्चों, शिक्षकों, पालकों आदि संबंधित व्यक्तियों से बातचीत करके उन कठिनाईयों के कारण जानने का प्रयास करते हैं। इसी के आधार पर सुधारात्मक प्रयास किये जाते हैं।

आत्म परीक्षण

1. गणितीय दक्षताएं कितने प्रकार की होती है समझाइये।
2. गणितीय दक्षताओं के विकास हेतु पाठ योजना बताइये।
   a) चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करना
   b) गुणनखण्ड ज्ञात करना
3. दक्षता आधारित मूल्यांकन का क्या अर्थ हैं?

4. गणित में मूल्यांकन के उद्देश्य स्पष्ट कीजिए?
5. आकलन की संकल्पना को बताते हुये इसके महत्व को विस्तार से समझाइए।
6. आकलन की विशेषताओं पर चर्चा कीजिए?
7. गणित शिक्षण में कठिनाईयों के निदान व निराकरण हेतु उपाय बताइए।
8. गणित में सृजनात्मकता से आप क्या समझते हैं? सृजनात्मकता के विकास हेतु शिक्षक की क्या भूमिका होनी चाहिए।
9. गणित के संदर्भ में बाल केन्द्रित शिक्षा क्या है?

काई – 10 सूचकांक –डी. एड./V/ 10

पत्राचार पाठ्यक्रम

माध्यमिक शिक्षा मंडल, म.प्र. भोपाल

डिप्लोमा इन एज्यूकेशन

विषय – गणित और उसका शिक्षण **प्रश्न पत्र– पंचम** **पाठ् क्रमांक–10**

विषयांश उपइकाई एक

उपइकाई –एक

निम्न भारतीय गणितज्ञों का जीवन परिचय, गणित जगत में उनका योगदान एवं कृतियाँ –

1. आर्यभट्ट

2. वराहमिहिर

3. श्रीधराचार्य

4. श्रीनिवास रामानुजम्।

उपइकाई–दो वैदिक गणित संक्रियाओं की जानकारी एवं उनका अनुप्रयोग

उपइकाई–तीन आधुनिक काल के भारतीय गणितज्ञों का गणित में योगदान।

प्रस्तावना –

गणित एक गहन और गूढ़ विषय है। इसका इतिहास अटकलों और रहस्यों के गर्भ में आवृत्त है। गणित के इतिहास में अनगिनत मोड़ हैं। यहां पाठ्यर्चाओं में उल्लिखित कुछ प्रमुख गणितज्ञों के विषय में जानकारी दी जा रही है। ये निश्चित रूप से गणित के इतिहास में प्रमुख स्थान रखते हैं।

उपइकाई – एक

निम्न भारतीय गणितज्ञों का जीवन परिचय, गणित जगत में उनका योगदान एवं कृतियाँ–

<u>आर्यभट्ट</u>

जीवन परिचय – आर्यभट्ट का जन्म 13 अप्रेल सन् 476 में केरल में हुआ था। वे अपनी पढ़ाई पूरी करने के लिये नालंदा विश्व–विद्यालय (पटना) में आये थे। यह विश्वविद्यालय उस समय में शिक्षा का बड़ा केन्द्र था। अध्ययन कालं में मात्र 23 वर्ष की आयु में उन्होंने एक पुस्तक आर्यभटीय लिखी। इस पुस्तक की सराहना उस समय के गुप्त शासक बुद्धगुप्त ने की एवं आर्यभट्ट को नालंदा विश्वविद्यालय का प्रधान नियुक्त कर दिया।

वैज्ञानिक विचार :– आर्यभट्ट सबसे पहले गणित वैज्ञानिक थे जिन्होंने बतलायों कि पृथ्वी गोल है और ये अपनी धुरी पर घूमती है। धूरी पर घूमने के कारण ही रात और दिन होते हैं आर्यभट्ट ने यह भी उदघाटित किया कि चंद्रमा में पूर्णतः अंधकार है सूर्य के प्रकाश से वह चमकता है। सूर्य ग्रहण या और चंद्र ग्रहण राहू के ग्रास के कारण नहीं होते बल्कि पृथ्वी और चंद्रमा की छायाओं के कारण होते हैं। इनका मत था कि पृथ्वी ब्रम्हांड का केन्द्र है। तत्कालीन यूनानी राजा टालमी की नक्षत्रों की गतिशीलता की प्रणाली की अपेक्षा आर्यभट्ट की नक्षत्रों की गतिशीलता संबंधी प्रणाली की ज्यादा सराहना की गई।

गणित में योगदान –

1. सर्वप्रथम आर्यभट्ट ने ही π का मान दशमलव के चार स्थानों तक शुद्धतम रूप में 2.3.1416 दिया जो आज के कम्प्यूटर युग में ज्ञात मान से मेल खाता है।

3. आर्यभट्ट ही सबसे पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने ज्या सारणी दी।

3. अनिर्धारित (इनडिटर मीनेट इक्वेशन) की हल पद्धति इन्हीं की देन है जिसे आज पूरी दुनिया के छात्र और गणितज्ञ जानते हैं।

4. इन्होंने ही बड़ी–बड़ी संख्याओं को शब्दों में लिखने का नया तरीका दिया।

5. बड़ी–बड़ी संख्याओं को कविता की भाषा में व्यक्त करने की कला भी इनमें थी।

6. रेखागणित, क्षेत्रभित्ति, वर्गमूल, घनमूल, प्रोग्रेसन पर भी इन्होंने उल्लेखनीय कार्य किया है।

वराहमिहिर

उज्जैन से 20 किलोमीटर पूर्व की ओर स्थित कपित्थ (कायथा) ग्राम में इनका जन्म सन् 499 में हुआ था। इनकी माता का नाम सत्यवती और पिताजी का नाम आदित्यदास था। अपने विद्वान पिता एवं अवन्ति क्षे के अन्य आचार्यों से शिक्षा ग्रहण कर वह उस काल में विश्व के श्रेष्ठतम गणितज्ञ हुए तथा अपने समय के प्रकाण्ड ज्योतिषाचार्य भी थे। जिनकी ख्याति दिग्दिगंत में व्याप्त हो गई। इन्होंने अपने पिता की स्मृति में कापिन्थका में सूर्य मंदिर बनवाया तथा गुरूकुल की स्थापना की जो 700 वर्षों तक गणित एवं विज्ञान का विश्व विख्यात अध्ययन केन्द्र बना रहा।

गणित के इतिहास में यह उज्जैन स्कूल के नाम से जाना जाता है। प्रसिद्ध गणितज्ञ कल्याणवर्मन्, प्रथुयशस (वरः मिहिर के पुत्र) ब्रहागुप्ता महावीराचार्य एवं भास्कराचार्य इसी गुरूकुल के उद्भट गणितज्ञ हुए हैं।

आचार्य वर! मिहिर नें सन् 505 ई. में खगोल विज्ञान की अति महत्वपूर्ण पुस्तक पच सिद्धांतिका की रचना की तथा उज्जैन के पूर्व सम्राट विक्रमादित्य द्वारा 57 इ. पूर्व स्थापित बेधशाला का जीर्णोद्वार किया। भारत में पूर्व पंचांग पद्धति में व्यापक सुधार करके नवीन पंचांग का सूत्रपात किया जिसकी संरचना पर आज की संपूर्ण देश में पंचांग बनाये जा रहे हैं। धातु यांत्रिकी का महान आश्चर्य मिहिरौली (दिल्ली) का लौह–स्तम्भ, जिस पर सम्राट चंद्रगुप्त, विक्रमादित्य की विजय–गाथा उत्कीर्ण है, आचार्य वरः मिहिर के निरीक्षण में विनिर्मित एवं स्थापित किया गया था। इसलिये यह स्थान मिहिरौली के नाम से प्रसिद्ध हुआ।

गणित की अनेक विधाओं सहित शून्य एवं अनंत की अवधारणाओं पर व्यापक शोध एवं उनके उपयोग वर मिहिर गुरूकुल की महान देन है, जो गणितीय विश्लेषण के मूल में अवस्थित है।

श्रीधराचार्य (850 ई.)

''कर्नाटक प्रदेश के निवासी थे। इनकी माता का नाम अब्बो तथा पिता का नाम श्रीधराचार्य वासुदेव शर्मा था। इन्होंने बचपन में अपने पिताजी से कन्नड़ तथा संस्कृत साहित्य का अध्ययन किया था।

श्रीधराचार्य ने अंकगणित पर नवशतिका तथा त्रिशतिका पाटी गणित और बीजगणित पुस्तकों की रचना की। इनका द्वि–घात समीकरण हल करने का सूत्र जो 'श्रीधराचार्य विधि कहलाता है, आज भी व्यापक रूप से प्रयोग में लाया जाता है। इनकी पुस्तक पाटी गणित का अनुवाद अरब में हिसाबुल तख्त नाम से हुआ।

'गणित सार' मं इनकी मुख्य देन अभिन्न, गुणक, वर्ग वर्गमूलक, घन, घनमूल, भिन्न, समच्छेद, भागाहार, भाव–जाति, प्रमाण जाति, भागानुबंध, त्रैराशिक, सख्त राशि, नवराशिक, भाण्ड, प्रतिभाण्ड़, मिश्रण,

व्यवहार, भाव्यक, व्यहार सूत्र , सुवर्ण गणित प्रक्षेपक सम्ब्रम विक्रम सूत्र श्रेणी व्यवहार, क्षेत्र व्यवहार, स्वात व्यवहार चितव,, , काष्ठ व्यवहार, राशि व्यवहार, छाया, गणित के उपविषयों का निरूपण किया है, वृत्त, क्षेत्रफल परिधि और व्यास का चुतुराशि बताया गया है।

श्रीनिवास रामानुजम् –

इनका जन्म 22, दिसम्बर 1887 ई. को मद्रास के तंजोर जिले में स्थित इरीद नाम के एक छोटे से गांव में हुआ था। पिता एक साधारण परिवार में निर्धन ब्राम्हण थे तथा एक कपड़े की दुकान पर मुनीमी करके अपना पेट पालते थे। रामानुजन ने अपनी प्रारम्भिक शिक्षा पाास के कस्बे कुम्बकोनम्, जाहाँ इनके पिता नौकरी करते थे, में प्राप्त की।

रामानुजम सूत्र रूप में गणित एवं अन्य सिद्धांतों को लिखने व सिद्ध करने की वैदिक परम्परा के आधुनिक युग के महान् गणितज्ञ हैं। इनकी श्रेष्ठता इसी से प्रमाणित है कि उनके द्वारा प्रतिपादित 50 प्रमेयों में से एक–दो को सिद्ध करने से ही गणितज्ञों एवं शोधकर्त्ताओं को वर्ष–पर्यन्त दत्तचित्त होकर परिश्रम करना पड़ा कुछ प्रमेय अभी तक सिद्ध नहीं किये जा सके हैं। इनकी कृति ' रामानुज डायरी ' शीर्षक से जन्मशती वर्ष में प्रकाशित हुई है।

जब रामानुजन इंग्लैंड में अपने अनुसंधान कार्यों में लगं हुये थे तभी उन्हें क्षय रोग (T.B.) ने ग्रसित कर लिया। इसी रोग के कारण 26 अप्रैल , 1922 के भारत के इस महान् गणितज्ञ का मद्रास के चैटपैट (Cheetpet) नामक स्थान पर देहांत हो गया।

<u>पाठगत प्रश्न–</u>

1. एक गणितज्ञ के रूप में आर्यभट्ट के योगदान की विवेचना कीजिये,

2. श्रीधराचार्य द्वारा रचित ग्रन्थ का नाम बताइये।

3. बराहमिहिर पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये।

4. श्री रामानुज का जन्म और मृत्यु किस सन् में हुई।

उपइकाई – दो

वैदिक गणित संक्रियाओं की जानकारी एवं उनका अनुप्रयोग

वैदिक गणित की मूल संकल्पनायें (Basic Concepts of Vedice Mathematics)

साधारण एवं वैदिक संख्यायें

गणित की साधारण प्रणाली में हम जिन संस्थाओं का प्रयोग करते हैं उनके सभी अंक धनात्मक होते हैं।

उदाहरणार्थ : संख्या 2346 के सभी अंक 2,3,4 और 6 धनात्मक हैं।

परंतु वैदिक गणित में ऐसी संख्याओं का भी प्रयोग किया जाता है जिनके अंक धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों ही प्रकार के होते हैं।

अब प्रश्न उठता है कि वैदिक गणित में ऋणात्मक अंकों का प्रयोग क्यों और किस प्रकार से होता है? इस प्रश्न का उत्तर है कि वैदिक गणित में प्रयुक्त संख्याओं के सभी अंक 5 अथवा 5 से छोटे रखे जाते हैं अर्थात् उनमें बड़े अंकों 6,7,8,9 का प्रयोग नहीं किया जाता है। अंकों 6,7,8,9 का छोटे अंकों में परिवर्तित करने की प्रक्रिया में ऋणात्मक अंक प्राप्त होते हैं। अतः वैदिक संख्या में धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों ही प्रकार के अंकों का समावेश हो जाता है।

विनकुलम्

वैदिक गणित में प्रयुक्त संख्याओं के अंकों को ऋणात्मक रूप में लिखने को विनकुलम कहते हैं। अतः वैदिक गणित में ऋणात्मक अंक (–4) को, अंक 4 के ऊपर ऋणात्मक चिन्ह लगाकर 4 द्वारा व्यक्त कर किया जाता है जो (–4) का विनकुलम् अंक अथवा विनकुलम् कहलाता है।

विनकुलम् का सिद्धांत –

वैदिक गणित में प्रयोग की जाने वाली संख्याओं में सभी अंक 5 अथवा 5 से छोटे रखे जाते हैं। अतः संख्या में जो भी अंक 5 से बड़े (6,7,8,9,) होते हैं, उन सभी अंकों के स्थान पर उनके विनकुलम् अंक रख देते हैं।

किसी अंक विनकुलम् अंक या विनकुलम् ज्ञात करना –

5 से बड़े जिस अंका का भी विनकुलम् ज्ञात करना होता है उस अंका का 10 से विचलन ज्ञात कर लेते हैं।

चूंकि 5 से बड़े अंक 6, 7, 8 और 9 सभी 10 से कम है, इसलिये इनके 10 से विचलन ऋणात्मक चिन्ह के होंगे। विचलन से प्राप्त इन ऋणात्मक अंकों को उनके ऊपर ऋणात्मक चिन्ह (–) लगाकर प्रदर्शित कर दिया जाता है। इन **रेखांकित अंकों को विनकुलम् या विनकुलम् अंक कहते हैं।**

उदाहरणार्थ – अंका 6 का विनकुलम् ज्ञात करना

अंक 6 का 10 से विचलन 6–10 = –4

∴ अंक 6 का विनकुलम् (अंक) $=\bar{4}$

इसी प्रकार, अंक 7 का विनकुलम् (अंक) $=\bar{3}$ $(\because 7-10=-3)$

अंक 8 का विनकुलम् (अंक) $=\bar{2}$ $(\because 8-10=-2)$

तथा अंक 9 का विनकुलम् (अंक) $=\bar{1}$ $(\because 9-10=1)$

विनकुलम् संख्यायें

धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों प्रकार के अंकों से बनी संख्यायें, विनकुलम् संख्यायें कहलाती हैं।

याद रखिये कि विनकुलम् संख्याओं में 5 अथवा 5 से छोटे अंकों का ही प्रयोग होता है। इन संख्याओं में 5 से बड़े अंक उनके विनकुलम् अंकों के रूप में लिखने का यह सूत्र एक सशक्त साधन है

उदाहरणार्थ संख्या 94 को हम विनकुलम् रूप में इस प्रकार लिखते हैं –

अंका 9 का विनकुलम् (अंक) $=\bar{1}$ $(\because 9-10=-1)$

अंक 9 के बायीं ओर 6 में 1 जोड़ने पर , 0 +1=1

अतः $94=1T4$

संक्षेप में $94=094=(0+1)\ (9-10)\ 4=1(-1)4=1T4$

नोट : **निखिलम् सूत्र**

निखिलम् सूत्र निम्न हैं –

' प्रत्येक अंक को 9 में से तथा अंतिम दाये अंक को 10 में से घटाओ।

उक्त सूत्र की सहायता से अंकों के समूह का विनकुलम् सरलतापूर्वक ज्ञात किया जा सकता है। अतः दी हुई सामान्य संख्या को विनकुलम् संख्या के रूप में लिखने का यह सूत्र एक सशक्त साधन है।

वैदिक विधि से संख्याओं का योग

साधारण गणित में संख्याओं का योग करने के लिए सबसे पहले हम इकाई के अंकों को जोड़ते हैं, फिर दहाई के अंकों को जोड़ते हैं : फिर सैकड़ा के अंकों को जोड़ते हैं, इत्यादि।

वैदिक गणित में भी संख्याओं का योग गइसी क्रम में ज्ञात किया जाता है, परंतु इसमें अपनायी गयी विधि साधारण गणित की विधि से कुछ भिन्न होती है। वैदिक गणित से संख्याओं का योग ज्ञात करते समय **हाँसिल** का प्रयोग नहीं किया जाता। बल्कि उनके स्थान पर उप सूत्र शुद्ध(शुद्ध अंक) का प्रयोग किया जाता है।

हासिल वाले जोड़ हासिल वाले जोड़ वैदिक गणित की रीति से बड़ी आसानी से सिखाये जा सकते हैं। इसके लिये 20 तक की गिनती बिना हासिल के संकलन और परम मित्र अंकों का अच्छा पूर्वाभ्यास चाहिये। परम मित्र अंक 1 से 10 तक की संख्याओं का अच्छा अभ्यास होने के बाद परम मित्र अंक बताना उचित होगा।

1. का परम मित्र 9 है और 9 का 1 है।

2. का परम मित्र 8 है और 8 का 2 है

3. का परम मित्र 7 है और 7 का 3 है

4. का परम मित्र 6 है और 6 का 4 है

5. का परम मित्र 5 है।

उदाहरण – 8+6 के लिए एक ढेरी 8 कंकड़ों की और एक 6 कंकड़ों की (या अन्य कोई वस्तु) बनायें। 8 का परम मित्र 2 है अतः दूसरी ढेरी में से 2 कंकड़ निकालें। शेष 4 रहेंगे। 8 और 2 को मिलाने पर परम मित्र होने के कारण 10 बनता है जिसमें 4 मिलाने पर गिनती पढ़ाते समय दस और चार 14 सिखाया है उसके अनुसार 14 बनता है। सम्पूर्ण क्रिया इस प्रकार है।

$$8+6=8+2+4=10+4=14$$

अन्य इसी प्रकार

$$8+7=8+2+5=10+5=15$$
$$9+5=9+1+4=10+4=14$$
$$7+8=7+3+5=10+5=15$$

नोट :– संख्या को अदल–बदल करने से कोई असर नहीं पड़ता जैसे 7+4=4+7होता है। अतः जोड़ने में सदा ही बड़ी में छोटी जोड़ना सरल है। जैसे 4 में 7 न जोड़कर 7 में 4 जोड़ना सुविधाजनक है।

शून्यांत संख्या का प्रयोग कर जोड़ना

जिन संख्याओं के अंत में शून्य होता है उन्हें शून्यांत संख्या कहते हैं। जैसे 10,20,100,500,410,230 . ... आदि। मौखिक जोड़ने में व्यवहार में हम इस विधि का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 1. 9+7

हल 9 में 1 जोड़े प्राप्त हुआ 10

7 में से 1 कम हुआ बचे 6

10 और 6 सोलह है।

अर्थात् $9+7=9+1+6=10+6=16$

उदाहरण 2. 198+87

हल – विलोकनम् से स्पष्ट है कि 198 में 2 जोड़ने पर 200 होगा 87 में से 2 कम हुये बचे 85 , अब 200+85=285

आत्मपरीक्षण–2

I शून्यांत संख्या का प्रयोग कर जोड़िये –

1. 19+11 2. 38+62 3. 43+27

4. 187+23 5. 299+31

उत्तरमाला –

I 1. 30 2. 100 3. 70 4. 210 5. 330

II 1. 61 2. 553 3. 52584. 14727

<u>सूत्र–एकाधिकेन पूर्वेन (एकाधिक चिन्ह (.)प्रयोग से जोड़ना)</u>

किसी अंक पर एकाधिक चिन्ह (.) लगाने पर उसका मान एक अधिक हो जाता है। जैसे 6 को '' एकाधिक छः '' पढ़ेगे और उसका मान 6 + 1 = 7 होगा।

जैसे – $\dot{2} = 2+1 = 3$

$$\dot{9} = 9+1 = 10$$

$$9+\dot{2} = 9+3 = 12$$

एकाधिक चिन्ह (.) का मान 1 हाता है।

उदाहरण –

$$1.\ \begin{array}{r} 3\ \ 8 \\ +\ 2\ \ 7 \\ \hline 6\ \ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.9378 \\ +0\,2895 \\ \hline 12273 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.2856 \\ +\ \ 3464 \\ \hline 12273 \end{array}$$

II एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र का प्रयोग कर योगफल ज्ञात कीजिये –

$$1.\ \begin{array}{r} 27 \\ +34 \end{array} \qquad 2.\begin{array}{r} 384 \\ +169 \end{array} \qquad 3.\begin{array}{r} 3478 \\ +1780 \end{array} \qquad 4.\begin{array}{r} 7873 \\ +6854 \end{array}$$

वैदिक विधि से संख्याओं का घटाना – हम जानते हैं कि दो संख्याओं को घटाने की क्रिया उन संख्याओं को उपर नीचे लिखकर की जाती है जबकि घटने वाली संख्या को सदैव नीचे लिखा जाता है।

साधारण गणित में हमने देखा है कि यदि घटने वाली संख्या के अंक, उपर वाली संख्या के स्थानीय अंकों से छोटे होते हैं तो घटाने की क्रिया सामान्य ढंग से कर ली जाती है। परंत यदि घटने वाला कोई अंक अपने उपर वाले स्थानीय अंक से बड़ा होता है तो हासिल लेकर घटाने की क्रिया की जाती है।

वैदिक गणित में हासिल का प्रयोग न करके उन सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण द्वारा व्यवकलन – (उपर की संख्या में अंक बड़े तथा नीचे की संख्या में अंक छोटे हों)

उदाहरण $\dfrac{\begin{array}{r}584\\-231\end{array}}{6320}$

सूत्र – एकन्यूनेन पूर्वेण का प्रयोग कर क्रमशः

4 में से 1 कम – 3

8 में से 3 कम – 5

5 में से 2 कम – 3

$$\begin{array}{r}584\\-\underline{231}\\353\end{array}$$

(उत्तर बायें से दायें या दायें से बायें लिखा जा सकता हैं)

सूत्र – एकाधिकेन पूर्वेण – (एकाधिक चिन्ह (˙)का प्रयोग तथा परम मित्र की सहायता से हासिल वाले प्रश्न सरलतापूर्वक किए जा सकते हैं। इसमें परममित्र अथवा पूरक अंक की सहायता ली जाए।

उदाहरण –

1. $\dfrac{\begin{array}{r}17\\-08\end{array}}{07}$

2. $\dfrac{\begin{array}{r}5301\\-2948\end{array}}{2353}$

विलोकनम् (ध्यान से देखना) से यह स्पष्ट हो जाता है कि इकाई में उपर का अंक नीचे के अंक से बड़ा है या छोटा है। यदि उपर का अंक बड़ा है तब घटाना सरल है। किन्तु नीचे का अंक बड़ा है तब नीचे के अंक का परममित्र उपर के अंक में जोड़े तथा पूर्व अंक (बायें अंक) का एकाधिक करने से सरलता हो जाती है।

नीचे की संख्या को शून्यांत बनाकर (निखिलम् सूत्र) – इस तरीके से घटाना सरल हो जाता है।

उदाहरण –

विलोकनम् से स्पष्ट है कि उपर तथा नीचे की दोनों संख्याओं में दो–दो जोड़ने पर नीचे की संख्या 48, शून्यांत हो जायेगी तथा घटाना सरल हो जाएगा। (नीचे की संख्या को शून्यांत बनाएं)

$$\begin{array}{r} 67 \\ -50 \\ \hline 17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 65 \\ -48 \\ \hline \end{array}$$

आत्मपरीक्षण – 3

सूत्र – एकाधिकेन पूर्वेण तथा परम मित्र की सहायता से हल कीजिए –

$$\begin{array}{r} 31 \\ -28 \\ \hline \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 312 \\ -176 \\ \hline \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 403 \\ -184 \\ \hline \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5231 \\ -1789 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

उत्तरमाला – 1. 03 2. 136 3. 219 4. 3442

वैदिक रीति से संख्याओं का गुणा – वैदिक गणित में गुणा करने की बहुत ही रोचक विधियां हैं। वैदिक गणित के सूत्रों के प्रयोग से अनेक प्रश्नों को मौखिक हल किया जा सकता है। साथ ही सीधे एक पंक्ति में उत्तर लिखा जा सकता हैं।

विधियां –

1. प्रचलित विधि
2. विलोकनम्
3. एकन्यूनेन पूर्वेण
4. एकाधिकेन पूर्वेण, अन्त्ययोर्दशकेडपि
5. निखिलम् – आधार, उपाधार
6. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

1. प्रचलित विधि हम जानते ही हैं। जैसे –
$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ 30\times \\ \hline 075 \\ \hline \end{array}$$

2. विलोकनम् – यह बहुत महत्वपूर्ण सूत्र है अनेक प्रश्नों का हल मात्र देखकर ही बतलाया जा सकता है जैसे–

- किसी संख्या में 10, 100, 1000 .... आदि का गुणा करना हो तो मात्र संख्या में दायीं औंर उतने ही शून्य रख दें जितने 10 या 100 इत्यादि में हैं।

  $37 \times 10 = 370$, $454 \times 100 = 45400$

- किसी संख्या में 5 का गुणा करना है तब संख्या के दायें एक शून्य रखकर उसका आधा कर दें।

  $86 \times 5 = \frac{860}{2} = 430$

- 50 का गुना करना है। दो शून्य रख कर आधा करने से सवाल बनेगा। जैसे

  $248 \times 50 = \frac{24800}{2} = 12400$

सूत्र– एकन्यूनेन पूर्वेण

किसी एक संख्या के सभी अंक 9 हो तब इस सूत्र के प्रयोग से प्रश्न को सरलता से हल कर सीधे एक पंक्ति में उत्तर लिखा जा सकता हैं। इसमें तीन स्थितियां है –

स्थिति 1 – गुण्य और गुणक में अंको की संख्या समान हो –

उदाहरण – 54×99

हल $-54 \times 99 = 53/46$

सूत्र – एकन्यूनेन पूर्वेण से 54 का एकन्यून 53

सूत्र – निखिलम् नवतः चरमम् दशतः से – $\begin{matrix} 10-4=6 \\ 9-5=4 \end{matrix}$ इस प्रकार 53 ⁄ 46 उत्तर प्राप्त होगा।

उदाहरण – 2148×9999

हल– 2147 ⁄ 7852

सूत्र – एकन्यूनेन पूर्वेण से 2148 का एकन्यून 2147 सूत्र निखिलम् नवतः चरमम् दशतः से 2, 1 एवं 4 को 9 में से तथा चरम अंक 8 को 10 में से घटाने पर प्राप्त हुआ 7852

उत्तर – 21477852

स्थिति 2 –(यदि गुण्य से गुणांक के अंक अधिक हो अर्थात् 9 अधिक हो)

– उदाहरण – 37×999

हल

$$\begin{aligned} &037 \times 999 \\ &036 \times 963 \\ &= 036963 \end{aligned}$$

(विलोकनम् से स्पष्ट है कि एक नौ अधिक है। अतः 37 के बायें एक शून्य रखकर अंको की संख्या दोनों ओर बराबर हो गई। अब सूत्र द्वारा हल करो)

स्थिति 3 – यदि 9 के अंक कम हो तब

उदाहरण – 13×9

हल – 12 / 9

$$\begin{array}{r} \underline{-12} \\ 117 \end{array}$$

उदाहरण -438×99

$$\begin{array}{r} 437 \\ \underline{-\ 4} \\ 436 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 99 \\ -\underline{37} \\ 62 \end{array}$$

सूत्र – एकाधिकेन पूर्वेण तथा अन्त्ययोदर्शकेडपि गुणा करने में इस सूत्र का प्रयोग तब करते हैं जब गुणक और गुण्य की इकाइयां परम मित्र हो – अर्थात् इकाइयों का जोड़ दस हो तथा दहाई आदि अन्य अंक समान हो। इस विधि का आगे विस्तार इस प्रकार है कि गणक और गुण्य के दायें समूहों का योग आधार संख्या 10, 100, 1000 .... आदि हो तथा शेष बायां समूह समान हो। यह तथ्य उदाहरण द्वारा समझते हैं।

उदाहरण – 12×18

हल – यहां $2+8=10$ $\qquad 12 \times 18 = 2/16 = 216$

सूत्र – एकाधिकेन पूर्वेण एवं अव्ययोदर्शकेडपि

1. उत्तर का बायां भाग – दहाई का एकाधिक $\times$ दहाई $2 \times 1 = 2$
2. उत्तर का दायां भाग – इकाइयों का गुणनफल $2 \times 8 = 16$
3. आधार में जितने शून्य होते है उत्तर के दांये भाग में उससे दो गुने अंक चाहिए।

उदाहरण

1) 31×39
$= 12/09$
$= 1209$

2) 193×197
$= 380/21$
38021

3) 304×306
$= 930/24$
$= 93024$

4) 198×102
$= 2/0196$
$= 20196$

<u>सूत्र – निखिलम् आधार, उपाधार</u>

इस सूत्र के प्रयोग से हम तब गुणा करते हैं जब संख्याएं आधार या उपाधार के निकट हो। यहां आधार, उपाधार तथा संख्या का इनसे विचलन के संबंध में ज्ञान प्राप्त करना आवश्यक है।

आधार – आधार के गुणज या गुणनखण्ड उपाधार कहलाते है। जैसे – 20, 30, 200, 300 आदि।

विचलन – कोई संख्या आधार या उपाधार से कितनी कम या अधिक है यही उसका उस आधार/उपाधार से विचलन कहलाता है।

1) $12 + 2$
$\times 14 + 4$
$16/8$
$= 168$

2) 15
$\times 17$
$\times 15 \quad 5$
$17 \quad 7$
$25/5$
$= 255$

8
$\times 13$
$8 \quad -2$
$13 + 3$
$11 \quad \bar{6}$
$= 11\bar{6}$

104
$\times 107$
$104 \quad 04$
$107 \quad 07$
$111/28$
$= 11128$

सूत्र – ऊर्ध्वातिर्यग्भ्याम् – इस सूत्र के प्रयोग से

किन्हीं दो संख्याओं का आपस में गुणा किया जा सकता है। तथा सीधे उपर एक ही पंक्ति में प्राप्त कर सकते हैं।

अर्थ – ऊर्ध्व – खड़ा – $\uparrow$ (उपर–नीचे)

तिर्यक – तिरघा – $\nwarrow \; \nearrow$ या $\nwarrow\!\!\!\!\nearrow$

$$\text{उदाहरण} - \begin{array}{c} 1 \\ \underline{\times 2} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 \\ \times 2 \\ \underline{6} \uparrow \end{array} \qquad \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ \underline{\times 20} \uparrow \end{array}$$

$$\text{उदारहाण} \quad \begin{array}{c} 21 \\ 5 \\ \underline{\times 13} \\ 2/7/3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \\ \underline{1} \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2\ 1 \\ \underline{1\ 3} \\ 3\times 2+1\times 1 \\ 6+1=7 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ 3 \\ \hline 1\times 3=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 123 \\ \underline{211} \\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ 2 \\ \hline 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1\ \ 2 \\ 1\ \ 3 \\ 2\ 11 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2\ \ 3 \\ 1\ \ 1 \\ 1\ \ 1 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \uparrow \\ 1 \\ \hline 3 \end{array}$$

ऊर्ध्वगुणा

आत्मपरीक्षण – 4

गुणा कीजिए –

57×99 $\quad 34\times 36$ $\quad 87\times 999$ $\quad 117\times 113$ $\quad 204\times 206$

निखिलम् तथा ऊर्ध्वतिर्यग्भयाम् के प्रयोग से हल कीजिए।

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times\underline{13} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 122 \\ \times\underline{102} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 98 \\ \times\underline{78} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ \times\underline{53} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 234 \\ \times\underline{212} \end{array}$$

उत्तर माला – 1. 5643 2. 12243. 86913 4. 13221 5. 42024

1. 143 2. 12444 3. 7644 4. 3392 5. 49608

भाग संक्रिया – वैदिक गणित में गुणन संक्रिया के समान ही भाग संक्रिया भी बड़ी सरल है। इसमें अनेक विधियां उपयोग में लाई जाती है। जब भाजक आधार के निकट तथा आधार से कम होता है तब भाग संक्रिया में निखिलम् विधि अधिक सुविधाजनक रहती हैं।

निखिलम् विधि – भाग संक्रिया प्रारंभ करने से पूर्व प्रश्न लिखते समय निम्न सावधानियां रखनी चाहिये।

1. भाजक का निकटतम आधार निश्चित कर उसकी पूरक संख्या ज्ञात कीजिये। कही–कहीं पूरक संख्या को संशोधित गुणांक भी कहते हैं। भाजक यदि एक अंकीय संख्या होता है तो उसका परम मित्र अंक ही पूरक संख्या होता है। आधार में जितने शून्य होते हैं, उतने ही अंक पूरक संख्या में होते हैं।
2. भाग संक्रिया में निर्धारित स्थान के दो खड़ी रेखाओं द्वारा तीन खण्ड बनाइये।
3. बायीं ओर से प्रथम खण्ड में भाजक
4. आधार में जितने शून्य है, भाज्य के उतने ही अंतिम अंक (इकाई से लेकर) तीसरे खण्ड में लिखिये।
5. भाज्य के शेष अंक मध्य खण्ड में लिखिये।

उदाहरण – $121 \div 8$ को कैसे लिखे?

क्रिया – 8 का निकटतम आधार = 10 पूरक संख्या = 2, आधार में शून्य एक, अतः तीसरे खण्ड में 1 तथा मध्य खण्ड में 12 लिखें। अतः प्रश्न लिखने का रूप निम्न बना।

प्रथम खण्ड	मध्य खण्ड		तृतीय खण्ड
8	1	2	1
2			

मध्य खण्ड में लिखे बायी ओर से भाज्य के प्रथम अंक को नीचे भागफल के स्थान पर लिखिये। इस अंक का पूरक संख्या में गुणा कर गुणनफल को मध्य खण्ड के ही दूसरे अंक के नीचे लिखिए। गुणनफल में दो अंक हो तो तीसरे अंक के नीचे भी लिखें। केवल दूसरे स्थान के उपर–नीचे के अंकों को जोड़िए और भागफल के स्थान पर लिखिए। अभी तीसरे स्थान के अंको की नहीं जोड़ना है। प्राप्त योग अंक का फिर पूरक संख्या से गुणा कर, गुणनफल को भाज्य के तीसरे अंक के नीचे लिखिए और जोड़िये। यह प्रक्रिया दोहराते जाइये, जब तक कि गुणनफल के अंक तृतीय खण्ड के अंतिम अंक (भाज्य का इकाई अंक) के नीचे

तक न लिख जाएं। अंत में जोड़ने पर मध्य खण्ड का नीचे लिखा भागफल तथा तृतीय खण्ड के नीचे लिखा शेषफल होता है।

<u>ध्यातव्य</u> – यदि अंत में प्राप्त शेषफल भाजक से बड़ा हो तो उसमें से भाजक घटाकर भागफल से एवं शेषफल को संशोधित कर लीजिये। विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा सकती है।

उदाहरण – $121 \div 8$

भाजक 8	1	2	1
आधार 2		2	
से अंतर		8	
भागफल	1	4	9
संशोधित	+ 1 + 1 –8		
भागफल	15 शेष		

संकेत

1. प्रश्न लिखो–उपरोक्त उदाहरण के समान
2. क्रिया – मध्य खण्ड का 1 नीचे भागफल के स्थान पर लिखें।
3. यह अंक 1 × पूरक संख्या 2 = 2, लिखे 2 के नीचे 2
4. योग $2+2=4$ नीचे लिखे भागफल के स्थान पर
5. पुनः गुणनफल $=4\times2=8$
6. 8 लिखे तृतीय खण्ड में 1 के नीचे भागफल $=149$ शेषफल $=9$

7. भाजक $=8$ अतः संशोधित भागफल = 15, शेषफल = 1

उदाहरण – 1245÷97

97	1	2	4	5
03		0	3	
			0	6
	1	2	8	1

1. भाजक = 97 आधार = 100 , पूरक संख्या = 03

2. तृतीय खण्ड में 45 व मध्य खण्ड में 12 लिखे।

3. मध्य खण्ड का 1 नीचे लिखा भगफल के स्थान पर

4. गुणनफल = $1 \times 03 = 03$

5. लिखे 2 के नीचे 0 व 4 के नीचे 3

6. योग $2+0=2$, लिखें योग कर भागफल के स्थान पर

7. पुनः गुणनुल $=2 \times 03=06$, लिखे अंतिम अंकों के नीचे।

8. योग करने पर भागफल =12, शेषफल = 81 यहां संशोधन का आवश्यकता नहीं है।

सूत्र – परावर्त्य योजयेत्

यदि भाजार आधार के निकट होता है तो भाग संक्रिया में सूत्र परावर्त्य योजयेत्, पर आधारित विधि अधिक उपयोगी रहती है। भाजक आधार में छोटा है या बड़ा है– इस बात का विधि पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

सूत्र का अर्थ है , चिन्ह परावर्तित कीजिये ओर संक्रिया प्रारम्भ कीजिये''।

उदाहरण :– $1234 \div 112$

112	1 2	3 4
12	– 1	–2
–1–2		–1–2
	1 1	0 2

संकेत –

1. भाजक = 112, आधार = 100 , विचलन = 12, दो अंक

2. परावर्तित अंक = –1–2

3. अतः तृतीय खण्ड में 34 व मध्य खण्ड में 12

4. आगे की क्रिया निखिलम् विधि के समान
5. भागफल = 11, तथा शेषफल = 02

ध्वजांक विधि (सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक)

भाग संक्रिया का प्रत्येक प्रश्न इस विधि के द्वारा बडत्री सरलता से हल किया जा सकता है।

उदाहरण – 1 : $1234 \div 23$

भाजक 23 के दो भाग , मुख्यांक =2 , ध्वजांक =3 अब प्रश्न का निम्न रूप बना।

2^3	4	$_0 9$	$_1 2$	$_1 2$
	2	1	4	0

भागफल शेषफल

भाजक 23 के दो भाग : मुख्यांक =2 , ध्वजांक =3 इसे प्रथम खण्ड में लिखें। तृतीय खण्ड में ध्वजांक एक ही अंक है इसलिये 4922 का एक अंतिम अंक 2 लिखें।

मध्य खण्ड में भाजय का शेष भाग 492 लिखें।

उदाहरण 2 : $23754 \div 74$

$7^4 2$	3	$_2 7$	$_1 5$	$_0 4$	
		3	2	1	0

आत्मपरीक्षण 75

1. निखिलम् विधि से भाग कीजिये।

$(i) 102 \div 9$ $(ii) 198 \div 96$ $(iii) 2320 \div 6$

2. सूत्र परावर्त्य योजयेत् आधारित विधि से भाग दीजिये।

$(i) 134 \div 11$ $(ii) 1121 \div 121$ $(iii) 298 \div 96$

3. ध्वजांक विधि से भाग दीजिये।

$(i) 1234567 \div 42$

$(i) 413251 \div 72$

उत्तरमाला

1. (i) भागफल – 11 2. भागफल – 2 3. भागफल – 257

(ii) शेषफल – 3 शेषफल – 6 शेषफल – 7

2. (i) भागफल – 2. भागफल – 9 3. भागफल – 3

(ii) शेषफल – शेषफल – 32 शेषफल – 10

3. (i) भागफल – 29394 2. भागफल – 5739

शेषफल – 19 शेषफल – 43

उप–इकाई तीन

आधुनिक काल के भारतीय गणितज्ञों का गणित में योगदान

वर्तमान काल (1800 ई. के पश्चात्)

1. नृसिंह बापू देव शास्त्री (1831 ई)

   नृसिंह बापू शास्त्री ने भारतीय एवं पाश्चात्य गणित पर पुस्तकों का सृजन किया। इन्हीं पुस्तकों में रेखागणित, त्रिकोणमिति, सायनवाद तथा अंकगणित मुख्य है।

2. सुधाकर द्विवेदी

   सुधाकर द्विवेदी ने दीर्घ वृत लक्षण, गोलीय, रेखागणित , समीकरण, मीमांसा, चलन–कलन, आदि अनेक पुस्तकों की रचना की। साथ ही ब्रहनं गुप्ता एवं भास्कर की पुस्तकों पर टीकायें लिखकर सामान्य जनता के लिये सुलभ करायी।

3. रामाजुनम् (1889ई)

   रामानुजम् सूत्र रूप में गणित एवं अन्य सिद्धांतों को लिखने व सिद्ध करने की वैदिक परम्परा के आधुनिक युग के महान् गणितज्ञ हैं। उनकी श्रेष्ठता इसी से प्रमाणित है कि उनके द्वारा प्रतिपादित 50 प्रमेयों में से एक दो को सिद्ध करने से ही गणितज्ञों एवं शोध कर्त्ताओं को वर्ष पर्यन्त दत्तचित्त होकर परिश्रम करना पड़ा। इनकी कृति ''रामानुज डायरी'' शीर्षक से जन्मशती वर्ष में प्रकाशित हुई है।

4. स्वामी भारती कृष्णतीर्थजी महाराज (1884–1960 ई)

   महान् गणितज्ञ एवं दार्शनिक जगद्गुरू शंकराचार्य भारती कृष्णतीर्थ आधुनिक युग में वैदिक गणित के प्रधान भाष्यकार है। इन्होंने अपनी पुस्तक 'वैदिक गणित' में वैदिक सूत्रों को पुनः प्रतिपादित किया है और उनमें निहित सिद्धांत और विधियों को इतनी सरल, सुग्राह्य एवं सुस्पष्ट भाषा में प्रस्तुत किया है कि गणित का एक साधारण विद्यार्थी भी उसे आत्मसात कर गणित के जटिलतम् प्रश्नों को अल्प समय में हल कर सकता है। इनकी पुस्तक वैदिक गणित पर एक प्रामाणिक ग्रन्थ है। स्वामीजी ने अपनी इस अनुपम कृति के माध्यम से वैदिक गणित में छिपी हुई अद्भुत क्षमता से परिचय कराकर गणित के केवल सामान्य विद्यार्थी को ही नहीं अपितु अधिकारी विद्वानों के अन्तः करण को भी झंकृत कर दिया है। उन्होंने हमें सर्वथा नवीन दृष्टि देकर वैदिक गणित पर शोध करने तथा उसका उपयोग करने के लिए विवश कर दिया है।